

TALLER DE INICIACIÓN CIENTÍFICA 2010

Superficies de Riemann

Felipe Riquelme Abarca

Licenciatura en Matemática

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Índice

1. Notaciones	2
2. Motivación	3
3. Superficies de Riemann	4
3.1. Cartas y Estructuras	4
3.2. Superficie de Riemann.	7
3.3. Ejemplos de Superficies de Riemann.	8
3.4. Poliedro Euclideo Visto Como Superficie de Riemann	13
4. Funciones Analíticas y Holomorfas	16
4.1. Funciones Analíticas en Superficies de Riemann	16
4.2. Ejemplos de Funciones Meromorfas	18
4.3. Funciones Holomorfas entre Superficies de Riemann	24
4.4. Propiedades Globales de Funciones Holomorfas	25
4.5. La Fórmula de Hurwitz	29
5. Toros Complejos y Sus Propiedades	32
5.1. Funciones Meromorfas en el Toro Complejo	32
5.2. Funciones Holomorfas entre Toros Complejos	34
6. Acciones de Grupo y Espacios de Cubrimiento	36
6.1. Acciones de Grupo en Superficies de Riemann	36
6.2. Espacios de Cubrimiento y el Grupo Fundamental	43
6.3. Una Mirada al Teorema de Uniformización	49
7. Integración en Superficies de Riemann	51
7.1. 1-Formas Analíticas, 1-formas C^∞ y 2-Formas C^∞	51
7.2. Integración en una Superficie de Riemann	54
8. Métrica en una Superficie de Riemann	60
8.1. Automorfismos y Métricas Invariantes	60
8.2. Distancias en Superficies de Riemann Simplemente Conexas	64
8.3. Extensión de Métrica	67
9. Geometría Diferencial y Superficies de Riemann	70
9.1. Existencia de Curvas Geodésicas	70
9.2. Superficies de Riemann Compactas de Curvatura Negativa	72
10. Bibliografía	75
11. Referencias	75

1. Notaciones

Con el fin de facilitar la comprensión de presente estudio, se considerarán las siguientes notaciones

\mathbb{C}	El cuerpo de los números complejos
\mathbb{D}	El disco unitario en \mathbb{C}
\mathbb{R}	El cuerpo de los números reales
\mathbb{Z}	El anillo de los números enteros
S^2	La 2-esfera en \mathbb{R}^3
\mathbb{P}^1	La línea proyectiva
\mathbb{C}_∞	La esfera de Riemann
$\Re(z)$	La parte real del número complejo z
$\Im(z)$	La parte imaginaria del número complejo z
$[x : y]$	Coordenadas homogéneas en \mathbb{P}^1
$\mathcal{O}_X(W)$	El anillo de funciones analíticas en un conjunto abierto $W \subset X$
$\mathcal{M}_X(W)$	El cuerpo de funciones meromorfas en un conjunto abierto $W \subset X$
$\text{ord}_p(f)$	El orden de una función meromorfa f en un punto p
$\text{mult}_p(F)$	La multiplicidad de una función holomorfa F en p
$\theta(z)$	Función theta
$\text{deg}(F)$	El grado de una función holomorfa F entre superficies de Riemann compactas
$e(S)$	El número de Euler de una variedad compacta S
$g(X)$	El género de una superficie compacta X
$G : X$	Un grupo G actuando en un conjunto X
$G \cdot p$	La órbita de un punto p bajo la acción de G
G_p	El estabilizador de un punto p bajo la acción de G
X/G	El cociente de X bajo la acción de G
$\text{Aut}(X)$	El grupo de automorfismos de una superficie de Riemann X
$\text{ord}_p(\omega)$	El orden de una 1-forma ω en un punto p
$\int_\gamma \omega$	La integral de una 1-forma ω a lo largo de un camino γ
$\text{Res}_p(\omega)$	El residuo de una 1-forma meromorfa ω en un punto p
$\int \int_D \eta$	La doble integral de una 2-forma η bajo un conjunto triangulable D
$\pi_1(X, p)$	El grupo fundamental de X en un punto p
$GL(2, \mathbb{C})$	El Grupo General Lineal; esto es, el grupo de las matrices invertibles de 2x2 sobre \mathbb{C}

2. Motivación

Sin lugar a dudas, una de las principales motivaciones de un matemático es generalizar resultados, y por tanto, crear nuevas teorías sobre las ya estudiadas. El maravillarse con esta ciencia es la motivación perfecta que nos lleva a trabajar día a día con el fin de proporcionar herramientas que en un futuro alguien tomará para hacer uso de ellas. Siguiendo con este espíritu, esta monografía pretende mostrar la extensión de resultados vistos en diversos cursos de pregrado de Licenciatura en Matemáticas.

En el curso de Análisis Complejo, o Variable Compleja, se estudian principalmente las propiedades de las funciones analíticas y meromorfas en dominios del plano complejo. Resultados como el Principio del Argumento, Principio del Módulo Máximo, Lema de Schwarz, entre otros, son herramientas que hasta el día de hoy proporcionan facilidades a la hora de resolver distintos tipos de problemas.

En esta monografía trabajaremos sobre espacios topológicos con características tales que permitirán extender el concepto de funciones holomorfas. En dichos espacios notaremos características topológicas que permitirán caracterizarlos, por el teorema de Uniformización, y facilitar el estudio de esta teoría. Las propiedades estudiadas en los cursos nombrados se extenderán de manera natural en este nuevo concepto de función holomorfa y por tanto serán herramientas útiles en el estudio futuro de nuevas teorías.

Los espacios topológicos, que serán nuestro objeto de estudio, serán superficies con características tales de inducir una métrica en ellas y estudiarlas desde la perspectiva de la Geometría Diferencial y la Topología Algebraica, dando cuenta que las exigencias impuestas en las superficies serán determinantes. La estructura analítica de una superficie define considerablemente su comportamiento topológico, geométrico y algebraico.

Con el fin de facilitar la lectura de este trabajo, se recomienda tener un conocimiento previo de los cursos de Algebra Abstracta, Geometría Diferencial, Topología y Variable Compleja.

3. Superficies de Riemann

3.1. Cartas y Estructuras

Una *Superficie de Riemann* es intuitivamente un espacio en el cual, localmente, se tiene una estructura similar a un dominio en el plano complejo. Además, en vecindades cercanas del espacio, se tiene una noción de compatibilidad, compatibilidad en el sentido analítico; esto es, que el espacio es *suave* en el sentido del análisis complejo. Estas características permiten estudiar a dicho espacio en un ámbito general. Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1.1. Sea $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $F(z, w) = z^2 + w^2 - 1$.

Buscamos un subconjunto X de \mathbb{C}^2 que sea localmente homeomorfo a un dominio en \mathbb{C} . Sea $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid F(z, w) = 0\}$. Gráficamente X es visto como en la *Figura 1*

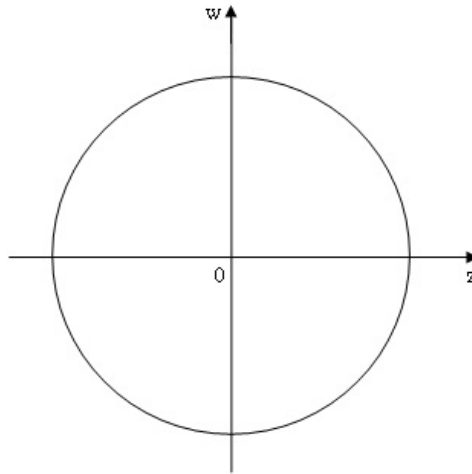


Figura 1: Gráfica de X en \mathbb{C}^2

Observamos que cada arco de curva suficientemente pequeño es homeomorfo a un dominio de \mathbb{C} .

El *Teorema de la Función Implícita* nos asegura que si $p = (z_0, w_0)$ tal que $p \in X$ y $\frac{\partial F}{\partial w}(p) \neq 0$ entonces existe una función $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en U vecindad de z_0 tal que cerca de p , X es igual a la gráfica de $w = g(z)$. Además $g' = -\frac{\partial F}{\partial z} / \frac{\partial F}{\partial w}$.

Consideramos $U_1 = \{p \in X \mid F_w(p) \neq 0\}$ y $U_2 = \{p \in X \mid F_z(p) \neq 0\}$, es claro que $X = U_1 \cup U_2$. Para $p = (z_0, w_0) \in U_1 \cap U_2$ tenemos que existen $g : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$, donde V_1 es vecindad de z_0 con $(z, w) = (z, g(z))$ en una vecindad de p y $f : V_2 \rightarrow \mathbb{C}$, donde V_2 es vecindad de w_0 con $(z, w) = (f(w), w)$ para una vecindad de p . Sean $\pi_1 : X \rightarrow \mathbb{C}$ y $\pi_2 : X \rightarrow \mathbb{C}$ las proyecciones

naturales, entonces $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}(z) = g(z)$ para cada $z \in \pi_1(U_1 \cap U_2) \subset V_1$ y $\pi_1 \circ \pi_2^{-1}(w) = f(w)$ para cada $w \in \pi_2(U_1 \cap U_2) \subset V_2$. Así las composiciones nos dan funciones holomorfas. Es evidente que π_i es homeomorfismo en U_i para $i = 1, 2$. La *Figura 2* nos muestra lo anterior

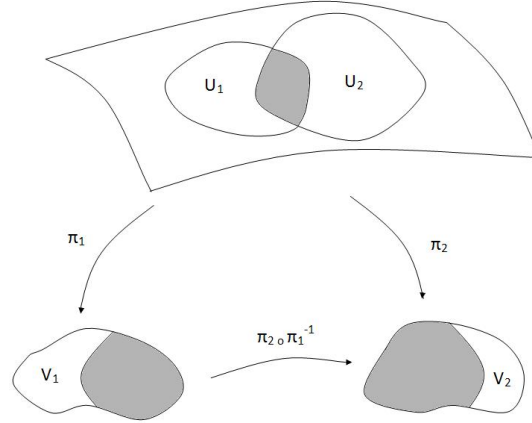


Figura 2: Comportamiento local

El ejemplo anterior nos deja una clara idea del concepto llamado *Coordenada Local* o bien una *Carta*. Sea entonces X un espacio topológico.

Definición 3.1.2. Una *Carta Compleja* en X es un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, donde $U \subset X$ es un conjunto abierto en X , y $V \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto en el plano complejo. El conjunto abierto U es llamado *Dominio* de la carta ϕ . Si $\phi(p) = 0$ con $p \in U$ la carta ϕ se dice *Centrada* en p .

A una carta en X se le puede asociar una *Coordenada Local* en su dominio, llamada $z = \phi(x)$ para $x \in U$.

En el ejemplo anterior nuestros abiertos de X eran U_1 y U_2 pues cada uno es el complemento de conjuntos cerrados, en efecto, $(U_1)^c = \{(z, w) \in X \mid F_w(z, w) = 0\}$, es decir, $(U_1)^c$ es el conjunto de preimágenes de un conjunto cerrado mediante una función continua. Así mismo las imágenes de las proyecciones π_1 y π_2 son conjuntos abiertos en \mathbb{C} .

Definición 3.1.3. Sean $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ dos cartas complejas en X . Diremos que ϕ_1 y ϕ_2 son compatibles si solo una de las dos condiciones siguientes se cumple:

- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$
- $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$ es holomorfa.

Sea $T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ en el segundo caso de la definición anterior; T es llamada *Función Transición* entre las dos cartas. Es claro que T establece una biyección holomorfa entre $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ y $\phi_2(U_1 \cap U_2)$. Un resultado inmediato del *Teorema de la Función Inversa* es que dada la biyección

holomorfa T se asegura que $T^{-1} : \phi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_1(U_1 \cap U_2)$ es holomorfa. En efecto, T puede ser vista como una función definida en un abierto de \mathbb{R}^2 cuya imagen es un abierto de \mathbb{R}^2 . De esta forma, si R_1 es el dominio en el plano real asociado a $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ y R_2 el abierto de \mathbb{R}^2 asociado a $\phi_2(U_1 \cap U_2)$, entonces la función de dos variables reales inducida por T , $F : R_1 \rightarrow R_2$, es de clase C^∞ pues T es holomorfa. Por otro lado, al ser T un homeomorfismo, F es homeomorfismo y luego $JF(x, y)$ es inyectiva en todo $(x, y) \in R_1$ por tanto $|JF(x, y)| \neq 0$ para cada $(x, y) \in R_1$. Por el Teorema de la Función Inversa concluimos que F^{-1} es de clase C^∞ y $JF^{-1}(x, y) = (JF(x, y))^{-1}$. Como $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ tenemos

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}$$

y luego

$$JF^{-1}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{u_x}{u_x^2 + u_y^2} & \frac{-u_y}{u_x^2 + u_y^2} \\ \frac{u_y}{u_x^2 + u_y^2} & \frac{u_x}{u_x^2 + u_y^2} \end{pmatrix}$$

Se observa que F^{-1} satisface *Cauchy-Riemann* y luego T^{-1} , la función compleja a valores complejos asociada a F^{-1} , es una función holomorfa.

En el ejemplo 3.1.1. observamos que $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}(z) = g(z)$ función holomorfa y $\pi_1 \circ \pi_2^{-1}(w) = f(w)$ es también holomorfa en su dominio. Es decir, π_1 y π_2 son cartas compatibles en X .

Lema 3.1.4. Sea T la función de transición entre dos cartas complejas compatibles. Entonces la derivada T' nunca se anula en el dominio de T .

Demostración:

Sea S la inversa de T . Luego $S \circ T(z) = z$ para todo z en el dominio de T . Por tanto, por regla de la cadena tenemos $S'(T(z))T'(z) = 1$, es decir, $T'(z) \neq 0$ para cada z en el dominio de T .

□

Ejemplo 3.1.5. Sea $\phi : U \rightarrow V$ una carta compleja en X y sea $\psi : V \rightarrow W$ una biyección holomorfa entre dos abiertos del plano complejo. Entonces las cartas ϕ y $\psi \circ \phi$ son compatibles. En efecto, la función transición T está definida por $T = \psi \circ \phi \circ \phi^{-1} = \psi$ la cual es holomorfa por hipótesis.

Observamos que una Carta nos entrega una descripción local de X . Nos gustaría tener una visión general. Para esto podemos mirar localmente a X , de manera de obtener un cubrimiento de X mediante dominios de cartas complejas compatibles en torno a cada punto de X . De esta manera, obtendremos en cada punto de X la noción de compatibilidad que requerimos para hablar de un espacio topológico *suave*.

Definición 3.1.6. Un *Atlas Complejo* \mathcal{A} en X es una colección $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ de cartas complejas compatibles de a pares cuyos dominios cubren X , es decir, $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

Observamos que en el ejemplo 3.1.1. se tiene que $\mathcal{A} = \{\phi_1, \phi_2\}$ es un Atlas Complejo en X . Ahora que tenemos esta noción de compatibilidad en todo el espacio topológico, nos enfrentamos

al problema de que podemos tener dos atlas complejos distintos definidos en el mismo espacio. Sin embargo, buscamos que la noción de compatibilidad sea independiente de éstos.

Definición 3.1.7. Diremos que dos Atlas Complejos \mathcal{A} y \mathcal{B} son *equivalentes* si cada carta en una es compatible con cada carta de la otra. Dicho de otra manera, dos atlas complejos son equivalentes si y sólo si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un atlas complejo en X .

Mediante la demostración clásica, vía Lema de Zorn, podemos mostrar que todo atlas complejo está contenido en uno maximal en el sentido de compatibilidad. Esto quiere decir que dos atlas complejos son equivalentes si están contenidos en el mismo atlas complejo maximal, el cual evidentemente es único.

Resulta necesario hacer notar que en un mismo espacio topológico podemos tener muchos atlas complejos los cuales no tienen porque ser equivalentes. De esta manera podemos establecer *Clases de Equivalencia* de atlas complejos en X ; dos atlas complejos son equivalentes si y sólo si están contenidos en el mismo atlas complejo maximal. Esto da lugar la siguiente definición

Definición 3.1.8. Una *Estructura Compleja* en X es el representante maximal de una Clase de Equivalencia de atlas complejos en X .

3.2. Superficie de Riemann.

Con el fin de obtener una noción de *suavidad*, en el sentido de diferenciabilidad compleja en un espacio topológico, las definiciones anteriores nos dieron condiciones necesarias de compatibilidad en vecindades cercanas del espacio. Podemos asociar entonces a un espacio topológico una estructura compleja.

Definición 3.2.1. Una *Superficie de Riemann* es un espacio topológico Hausdorff, conexo y segundo contable, junto a una estructura compleja.

Ahora bien, estudiemos primero algunas propiedades de la topología de las superficies de Riemann. Para esto daremos las siguientes definiciones.

Definición 3.2.2. Sea X un espacio topológico Hausdorff. Una *Carta Real n -dimensional* en X es un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, donde $U \subset X$ es un abierto en X y $V \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto en \mathbb{R}^n . Dos cartas reales ϕ_1 y ϕ_2 se dicen *C^∞ -Compatibles* si la intersección de sus dominios es vacío o la función transición $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$ es un difeomorfismo C^∞ . Las definiciones de *Atlas C^∞* , *Estructura C^∞* son análogas al caso complejo. Una *Variedad Real Diferenciable* de clase C^∞ es un espacio topológico Hausdorff, Conexo y Segundo-Contable junto a una Estructura C^∞ .

Otra característica topológica de las variedades reales diferenciables es la orientabilidad. Dos cartas reales tienen la misma *orientación* si el determinante de la matriz jacobiana de la función transición entre ellas es positiva en todo el dominio de ésta. Una variedad real diferenciable se dice *orientable* si todas las cartas reales de su estructura tienen la misma orientación. Notemos que, en el caso de una superficie de Riemann, las funciones de transición de las cartas complejas son homeomorfismos analíticos, es decir, el determinante de la matriz jacobiana de toda función transición es positivo (pues se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann).

Uno de los resultados más interesantes en la Topología Algebraica es la clasificación de las variedades 2-dimensionales orientables y compactas. Esta clasificación dice que cada una de éstas es homeomorfa a un *g-toro* donde *g* indica la cantidad de “asas” en la superficie. Por tanto se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.2.3. Toda superficie de Riemann es una Variedad Real C^∞ , 2-dimensional, arco-conexa y orientable. Toda superficie de Riemann compacta es difeomorfa a un *g-toro* para algún único entero $g \geq 0$ (Ver Algebraic Geometry, I.R. Shafarevich).

3.3. Ejemplos de Superficies de Riemann.

Para definir una Superficie de Riemann parece necesario partir con un espacio topológico X , Hausdorff, conexo y segundo-contable, luego se define un atlas complejo en éste. En otras palabras, uno necesitaría tener una topología en primera instancia y luego se podría imponer una estructura compleja. A continuación se mostrará cómo definir una topología dado un atlas complejo.

Si $\{U_\alpha\}$ es un cubrimiento abierto de un espacio topológico X , entonces un conjunto $U \subset X$ es abierto en X si y solo si cada intersección $U \cap U_\alpha$ es abierta en U_α . En efecto, si U es abierto en X por definición de topología de subespacio obtenemos que $U \cap U_\alpha$ es abierto en U_α para cada α . Si $U \cap U_\alpha$ es abierto en U_α entonces $U \cap U_\alpha = V_\alpha \cap U_\alpha$ donde V_α es un abierto de X . Luego $U = \bigcup_\alpha U \cap U_\alpha = \bigcup_\alpha V_\alpha \cap U_\alpha$ de donde la segunda igualdad es unión arbitraria de abiertos de X . Luego U es abierto en X .

Más generalmente, si cualquier colección $\{U_\alpha\}$ de subconjuntos de X que lo cubre está dada, y las topologías para cada U_α están dadas, es posible definir una topología en X usando la afirmación anterior. Un conjunto U de X se dice abierto en X si y solo si $U \cap U_\alpha$ es abierto en cada U_α .

Ahora supongamos que tenemos una colección $\{U_\alpha\}$, que cubren X , y una colección de biyecciones $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ donde cada V_α es un abierto de \mathbb{C} . Cada V_α tiene la topología de subespacio de \mathbb{C} , la cual induce una topología en U_α por medio de ϕ_α ; esto es, un subconjunto U de U_α se dice abierto en U_α si y solo si $\phi_\alpha(U)$ es un abierto en V_α . Notamos que con estas topologías, cada ϕ_α es un homeomorfismo.

Como conclusión, si tenemos una colección de conjuntos $\{U_\alpha\}$ que cubren X y una colección de biyecciones $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, es posible definir una topología en X ; esto es, un conjunto U se dirá abierto en X si para cada β , el conjunto $U \cap U_\beta$ es abierto en U_β .

Así podemos tomar los siguientes pasos para definir una Superficie de Riemann:

- Partir con un conjunto X .
- Encontrar una colección contable de subconjuntos $\{U_\alpha\}$ de X que cubran X .
- Para cada α encontrar una biyección ϕ_α de U_α en un abierto V_α del plano complejo.
- Verificar que para cada α y β , $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es abierto en V_α .
- Verificar que $\{\phi_\alpha\}$ es un atlas complejo.
- Verificar que X es conexo y Hausdorff.

Ejemplo 3.3.1. Llamaremos *Línea Projectiva Compleja*, \mathbb{P}^1 , al conjunto de los subespacios 1-dimensionales de \mathbb{C}^2 . Como todo subespacio 1-dimensional queda determinado por un vector no nulo en él, se tiene que si $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ es un vector no nulo, éste será un punto en \mathbb{P}^1 . Denotamos dicho punto como $[z, w]$. Observemos que todo punto en \mathbb{P}^1 puede escribirse de la forma $[z, w]$ con z y w no ambos nulos. Además

$$[z, w] = [\lambda z, \lambda w]$$

para cualquier $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Usaremos el método descrito anteriormente para definir una estructura compleja en \mathbb{P}^1 .

Sean $U_0 = \{[z, w] \in \mathbb{P}^1 \mid z \neq 0\}$ y $U_1 = \{[z, w] \in \mathbb{P}^1 \mid w \neq 0\}$. Es claro que $\{U_0, U_1\}$ cubren \mathbb{P}^1 . Definimos $\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ por $\phi_0([z, w]) = \frac{w}{z}$ y $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ por $\phi_1([z, w]) = \frac{z}{w}$. Ambas son biyecciones; en efecto, para la inyectividad se tiene que dos cuocientes de la forma $\frac{z_0}{w_0}$ y $\frac{z_1}{w_1}$ son iguales si existe λ tal que $z_0 = \lambda z_1$ y $w_0 = \lambda w_1$, es decir que sus preimágenes son $[z_0, w_0]$ y $[\lambda z_0, \lambda w_0]$ las cuales por definición de \mathbb{P}^1 son iguales. Por otra parte todo complejo es cuociente de dos complejos cuyo denominador es no nulo, por tanto ϕ_0 es sobre. Para el caso de ϕ_1 la demostración es análoga. Notemos además que $\phi_i(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ para $i = 0, 1$. La composición $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la cual es holomorfa en dicho dominio, por tanto las cartas son compatibles. Por otro lado, como U_0 y U_1 son conexos con intersección no vacía, su unión es conexa, por tanto \mathbb{P}^1 es conexo. Queda mostrar que \mathbb{P}^1 es Hausdorff. En efecto, si p y q son puntos en \mathbb{P}^1 , ambos es U_i para algún i , como U_i es Hausdorff se tiene la afirmación. Por tanto si $p \in U_0 - U_1$ y $q \in U_1 - U_0$ se tiene que $p = [1, 0]$ y $q = [0, 1]$ por lo cual dichos puntos están separados por $\phi_0^{-1}(D)$ y $\phi_1^{-1}(D)$ donde D es el disco unitario abierto en \mathbb{C} .

Por último, $\mathbb{P}^1 = \phi_0^{-1}(\overline{D}) \cup \phi_1^{-1}(\overline{D})$, donde $\phi_i^{-1}(\overline{D})$ es cerrado en \mathbb{P}^1 . Luego como \overline{D} es compacto y ϕ_i es homeomorfismo, se tiene que \mathbb{P}^1 es compacto.

Consideremos ahora $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ definida por $f([z, w]) = \frac{w}{z}$. Así definida es claro que

$$f([z, w]) = \begin{cases} \phi_0([z, w]) & \text{si } [z, w] \in U_0 \\ \infty & \text{si } [z, w] \in U_1 \setminus U_0 \end{cases}$$

Resulta evidente que f es homeomorfismo y luego \mathbb{P}^1 es una superficie de Riemann compacta de género 0.

Ejemplo 3.3.2. (Toro Complejo). Fijemos dos números complejos w_1 y w_2 linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Se define el *Reticulado* L como sigue

$$L = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = \{m_1w_1 + m_2w_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

El reticulado L es un subgrupo del grupo aditivo de \mathbb{C} . Sea $X = \mathbb{C}/L$ el grupo cociente, con la proyección natural $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$. Notemos que mediante π podemos dotar a X de la topología cociente, es decir, $U \subset X$ es abierto si y solo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en \mathbb{C} . Esta definición hace inmediato que π sea continuo y como \mathbb{C} es conexo, X lo es.

Notemos además que π es una función abierta, es decir, si V es abierto en \mathbb{C} , lo será $\pi(V)$. Esta afirmación es clara al notar que

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{w \in L} (w + V)$$

la cual es unión de traslaciones de V por elementos de L , todos abiertos en \mathbb{C} . Por definición de topología en X se deduce que $\pi(V)$ es abierto en X .

Para cualquier $z \in \mathbb{C}$, definimos el paralelogramo cerrado

$$P_z = \{z + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \mid \lambda_i \in [0, 1]\}.$$

Notar que todo punto de \mathbb{C} es congruente módulo L a algún punto de P_z ; esto es, si $w \in \mathbb{C}$ se tiene que existe $z_0 \in P_z$ tal que $w = z_0 + m w_1 + n w_2$ para algún par de enteros m, n . En efecto, como $w - z \in \mathbb{C}$ y w_1, w_2 son linealmente independientes sobre \mathbb{R} , existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$w - z = a w_1 + b w_2$$

Si denotamos por m al mayor entero menor que a , n al mayor entero menor que b , $\lambda_1 = a - m \in [0, 1]$ y $\lambda_2 = b - n \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned} w - z = a w_1 + b w_2 &= (m + \lambda_1) w_1 + (n + \lambda_2) w_2 \\ &= m w_1 + n w_2 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \end{aligned}$$

luego

$$w = m w_1 + n w_2 + z + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$$

es decir, si llamamos z_0 al número complejo $z + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$, se tiene

$$w = z_0 + m w_1 + n w_2$$

lo que prueba la afirmación. Por tanto, como P_z es compacto, $\pi(P_z) = X$ lo es.

El *reticulado* L forma un subconjunto discreto de \mathbb{C} por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|w| > 2\varepsilon$ para todo $w \in L$ no nulo. Fijar tal ε y fijar $z_0 \in \mathbb{C}$. La elección de ε nos asegura que en $B = B(z_0, \varepsilon)$ no existen dos elementos cuya imagen por π sea la misma, es decir, como consecuencia, cada punto $x \in X$ es tal que $\pi^{-1}(x)$ es discreto en \mathbb{C} (ver Figura 4). Luego

$$\pi|_B : B \rightarrow \pi(B)$$

es un homeomorfismo.

Para definir un atlas en X consideremos ε como lo escogimos previamente y para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ consideramos $D_{z_0} = B(z_0, \varepsilon)$. Definimos $\phi_{z_0} : \pi(D_{z_0}) \rightarrow D_{z_0}$ como la función inversa de $\pi|_{D_{z_0}}$.

Resulta claro que $\mathcal{A} = \{\phi_{z_0} \mid z_0 \in \mathbb{C}\}$ es atlas complejo en X . En efecto basta mostrar que las cartas son compatibles a pares. Sean z_1, z_2 puntos en X y consideremos $\phi_1 = \phi_{z_1} : \pi(D_{z_1}) \rightarrow D_{z_1}$

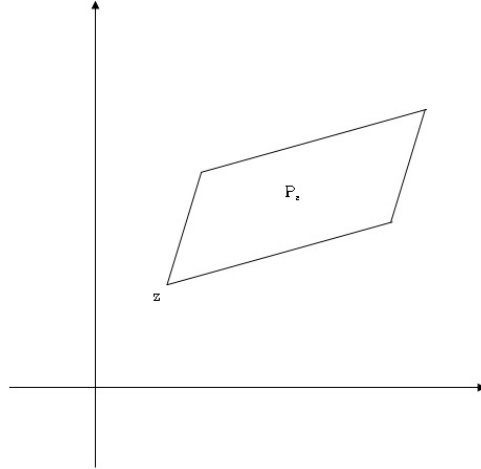


Figura 3: Paralelogramo P_z en el plano complejo

y $\phi_2 = \phi_{z_2} : \pi(D_{z_2}) \rightarrow D_{z_2}$. Sea $U = D_{z_1} \cap D_{z_2}$. Si U es vacío no hay nada que probar, si U es no vacío, sea $T = \phi_2(\phi_1^{-1}(z)) = \phi_2(\pi(z))$ para $z \in \phi_1(U)$. Notemos que $\pi(T(z)) = \pi(z)$ para cada $z \in \phi_1(U)$, luego $T(z) - z = w(z) \in L$ para cada $z \in \phi_1(U)$. La función $w : \phi_1(U) \rightarrow L$ es continua, L es discreto, por tanto w es constante en $\phi_1(U)$. Así $T(z) = z + w$ para algún $w \in L$, y luego T es holomorfa. Es decir, dos cartas ϕ_1 y ϕ_2 son compatibles y luego \mathcal{A} es un atlas complejo en X .

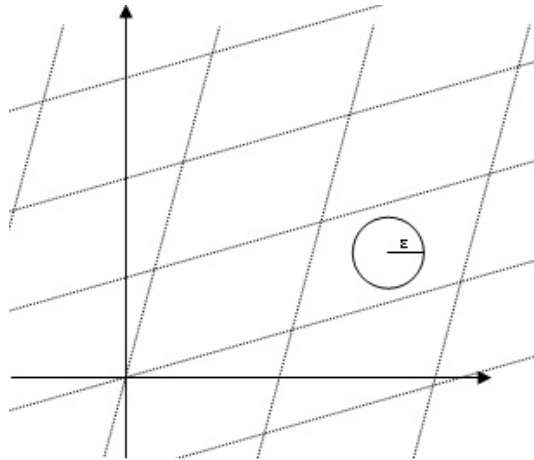


Figura 4: $\pi^{-1}(x)$ es discreto

Hemos mostrado entonces que X es una superficie de Riemann. Podemos ver intuitivamente que X es de género uno, es decir X es un toro; en efecto, considerando X como la imagen del paralelogramo P_0 , bajo la función $\pi|_{P_0}$ los lados opuestos están identificados. Finalmente llamamos X el *Toro Complejo*.

Ejemplo 3.3.3. (Curvas Planas) Recordemos el ejemplo 3.1.1., en ese caso consideramos un polinomio complejo de dos variables $f(z, w)$ y definiamos un subconjunto de \mathbb{C}^2 , $X = \{(z, w) \mid f(z, w) = 0\}$. Buscamos condiciones necesarias y suficientes para asegurar que X es efectivamente una superficie de Riemann.

Definición 3.3.3.1. Una *Curva Plana* es el conjunto de ceros en \mathbb{C}^2 de un polinomio $f(z, w)$. Un polinomio $f(z, w)$ es *no singular* en una raíz p si alguna de las derivadas parciales, $\partial f/\partial z$ o $\partial f/\partial w$, no se anula en p . La curva plana X es *no singular* en p si f es no singular en p . La curva X es *no singular*, o *suave*, si esta es no singular en cada uno de sus puntos.

La construcción realizada en nuestro primer ejemplo nos entrega los pasos necesarios para definir las cartas locales. Buscamos entonces que nuestra curva plana sea suave, esto nos aseguraría que la curva plana es conexa.

Un polinomio $f(z, w)$ se dice *irreducible* si no existen factorizaciones no triviales como $f(z, w) = g(z, w)h(z, w)$, donde g y h son polinomios no constantes.

Teorema 3.3.3.2. Si $f(z, w)$ es un polinomio irreducible, entonces el conjunto de raíces de f , X , es conexo. Así, si f es no singular e irreducible, X es superficie de Riemann (Ver Algebraic Geometry, I.R. Shafarevich).

Ejemplo 3.3.4. Sea S^2 la 2-esfera unitaria en \mathbb{R}^3 ; esto es,

$$S^2 = \{(x, y, w) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + w^2 = 1\}.$$

Consideremos al plano $w = 0$ como el plano complejo (una copia de él vía homeomorfismo), tal que $(x, y, 0)$ se identifica con el complejo $z = x + iy$. Sea $\phi_1 : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ definido por la proyección estereográfica desde $(0, 0, 1)$. Es decir

$$\phi_1(x, y, w) = \frac{x}{1-w} + i \frac{y}{1-w}.$$

Su inversa es

$$\phi_1^{-1}(z) = \left(\frac{2\Re(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\Im(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Sea $\phi_2 : S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ la proyección estereográfica desde $(0, 0, -1)$ dada por

$$\phi_2(x, y, w) = \frac{x}{1+w} - i \frac{y}{1+w}.$$

con su inversa

$$\phi_2^{-1}(z) = \left(\frac{2\Re(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{-2\Im(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{1 - |z|^2}{|z|^2 + 1} \right).$$

Así, el dominio común entre las dos funciones es $S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$, con ambas imágenes siendo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, restringidas a dicho dominio. La función de transición $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = 1/z$, la cual es analítica. Luego las dos cartas en S^2 son compatibles.

Con la definición de cartas anterior, S^2 se conoce como la Esfera de Riemann, denotada por \mathbb{C}_∞ . Notemos que, como S^2 topológicamente es una superficie compacta de género 0, la Esfera de Riemann también lo será.

3.4. Poliedro Euclideo Visto Como Superficie de Riemann

Para concluir esta sección de ejemplos de superficies de Riemann consideraremos el caso de los poliedros euclidianos. Los poliedros euclidianos son superficies en el espacio \mathbb{R}^3 compactas y orientables, más específicamente un poliedro es un cuerpo geométrico en el espacio cuyas caras son polígonos, de forma tal que dicho cuerpo encierra un volumen finito. Naturalmente se concluye que un poliedro es una superficie triangulable.

Sea X un poliedro euclideo, entonces existen subconjuntos de X , $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ y homeomorfismos $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ tal que

$$\varphi_i : T'_i \rightarrow T_i \text{ y } \bigcup_{i=1}^n T_i = X$$

con T'_i un triángulo euclideo en el plano \mathbb{R}^2 para todo $i = 1, \dots, n$. Además se satisface

- Si dos triángulos T_i y T_j tienen elementos en común, entonces $T_i \cap T_j$ es un lado o un vértice.
- Cada lado del poliedro (arista) delimita a exactamente dos triángulos.
- Los triángulos con un vértice en común pueden ser enumerados de modo que si F_1, \dots, F_k son dichos triángulos, entonces F_i, F_{i+1} y F_1, F_k tienen un lado en común para cada $i = 1, \dots, k-1$.
- Los triángulos son orientados de modo que sus orientaciones se correspondan.

Buscamos definir una estructura compleja en el poliedro X . Para esto debemos distinguir tres posibles puntos $p \in X$

1. p está contenido en el interior de un triángulo
2. p es un punto de un lado (arista) que no es vértice
3. p es un vértice del poliedro

Sea $p \in X$ en el caso 1. Entonces, si $p \in T_i$, $\varphi_i^{-1}(p) \in \text{interior}(T'_i)$. Sabemos además que T'_i es homeomorfo a un triángulo en el plano complejo, digamos que $\psi_i : T'_i \rightarrow T$ es dicho homeomorfismo, con T el triángulo complejo. Como $p \in \text{interior}(T_i)$, existe $U \subset X$ abierto de X que contiene a p , contenido en el interior de T_i . De esta forma $\phi : U \rightarrow \psi_i \circ \varphi_i^{-1}(U)$ es un homeomorfismo, en particular una carta compleja para el punto p .

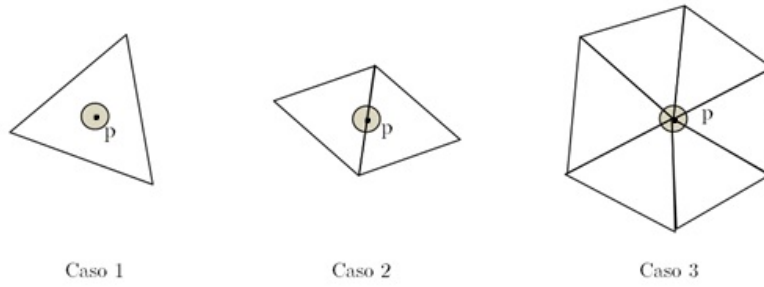


Figura 5: Casos posibles de un punto $p \in X$

Sea $p \in X$ en el caso 2, digamos que $p \in T_i \cap T_j$. Sin pérdida de generalidad supongamos que T'_i y T'_j comparten un lado en \mathbb{R}^2 . Luego $\varphi_i^{-1}(p) \in T'_i \cap T'_j$, más específicamente $\varphi_i^{-1}(p) \in \text{interior}(T'_i \cap T'_j)$, luego existe $U' \subset \text{interior}(T'_i \cap T'_j)$ que contiene a $\varphi_i^{-1}(p)$. Por *pasting lemma* (Ver Topology, J. Munkres) existe $\varphi : T'_i \cup T'_j \rightarrow T_i \cup T_j$ un homeomorfismo; sea $U = \varphi(U')$. Naturalmente se tiene que el cuadrilátero $T'_i \cup T'_j$ es homeomorfo a un cuadrilátero complejo; llamamos $\psi : T'_i \cup T'_j \rightarrow C$ a dicho homeomorfismo, con C el cuadrilátero complejo. Entonces la función $\psi \circ \varphi^{-1} : U \rightarrow \psi(U')$ es una carta compleja para p .

Consideremos $p \in X$ en el tercer caso. Sean T_r, \dots, T_s la secuencia de triángulos que tienen como vértice común a p . Sea θ_i el ángulo de T_i en p para $i = r, \dots, s$ (aquí el ángulo corresponde al ángulo de T'_i).

Definamos

$$\gamma = \frac{2\pi}{\sum_{i=r}^s \theta_i}$$

Sea $T_i^k = \{x \in T_i \mid \|x - p\| < k\}$

Sea $U^k = \bigcup_{i=r}^s T_i^k$

Podemos suponer que $\varphi_i^{-1}(p) = \varphi_j^{-1}(p)$, para $r \leq i, j \leq s$. Por *pasting lemma* existe una función $\varphi : \bigcup_{i=r}^s \varphi_i^{-1}(T_i^k) \rightarrow U^k$ (es en efecto función cociente) de modo que

$$\varphi|_{T_i^k} = \varphi_i|_{\varphi_i^{-1}(T_i^k)}$$

Esta construcción la hacemos de modo que, al ser $\sum_{i=r}^s \theta_i \leq 2\pi$, entonces $\varphi_i^{-1}(T_i^k) \cap \varphi_j^{-1}(T_j^k) = p$ para todo $r \leq i, j \leq s$.

Por otro lado, $U^k = \varphi^{-1}(U^k)$ es homeomorfo a $V \subset \mathbb{C}$, algún subconjunto de \mathbb{C} ; $\psi : U^k \rightarrow V$ define dicho homeomorfismo, con $\psi \circ \varphi^{-1}(p) = 0$.

Finalmente si $\eta : V \rightarrow \eta(V)$ se define por la función que z lo envía a z^γ , se tiene que cada sector de ángulo θ_i es enviado a un sector de ángulo $\gamma\theta_i$, de modo que

$$\sum_{i=r}^s \gamma\theta_i = \gamma \sum_{i=r}^s \theta_i = 2\pi$$

Cabe destacar que por construcción de η se asegura que es función abierta y sobre, $\eta(V)$ es bola abierta en \mathbb{C} . La función $\eta \circ \psi : U^k \rightarrow \eta(V)$ es función abierta y sobre.

Por las hipótesis anteriores aseguramos que $\eta \circ \psi$ induce un homeomorfismo $\phi : U^k \rightarrow \eta(V)$ (Ver Topology, J. Munkres), es decir, ϕ es carta compleja para $p \in X$.

Las cartas complejas definidas previamente son analíticas y compatibles entre sí debido a que las funciones de transición son composiciones de funciones de la forma

$$z \mapsto az + b \quad \text{y} \quad z \mapsto z^\gamma$$

es decir, las cartas definen un atlas complejo en X , y luego una estructura compleja en X .

4. Funciones Analíticas y Holomorfas

En esta sección estudiaremos funciones definidas en superficies de Riemann cuyos conjuntos de llegada son el plano complejo u otra superficie de Riemann. Nos gustaría que estas funciones tengan una propiedad en particular, por ejemplo ser analíticas u holomorfas. Sabemos que para funciones complejas de una variable compleja estos términos son equivalentes, en esta sección haremos una distinción solo para evitar confusiones.

4.1. Funciones Analíticas en Superficies de Riemann

Sea X una superficie de Riemann, sea p en X y sea f una función compleja, es decir $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, definida en una vecindad W de p .

Definición 4.1.1. Decimos que f es *analítica en p* si existe una carta $\phi : U \rightarrow V$ con $p \in U$ tal que la composición $f \circ \phi^{-1}$ es analítica en $\phi(p)$. Decimos que f es analítica en W si ésta es analítica en cada punto de W .

La compatibilidad de las cartas definidas en nuestra superficie de Riemann trae consecuencias inmediatas para la definición previa.

Lema 4.1.2. Sea X una superficie de Riemann, sea p un punto en X y sea f una función compleja definida en una vecindad W de p . Entonces:

- f es analítica en p si y sólo si para cada carta $\phi : U \rightarrow V$ con $p \in U$ se tiene $f \circ \phi^{-1}$ es analítica en $\phi(p)$
- f es analítica en W si y sólo si existe una colección de cartas $\{\phi_i : U_i \rightarrow V_i\}$ con $W \subset \bigcup_i U_i$ tal que $f \circ \phi_i$ es analítica en $\phi_i(W \cap U_i)$ para cada i .
- Si f es analítica en p entonces lo es en una vecindad de p .

Supongamos ahora que X es una superficie de Riemann, $p \in X$ y f analítica definida en una vecindad de p agujereada en p . El concepto del tipo de singularidad en p (removible, polo, esencial) para funciones complejas de una variable compleja se extiende de manera natural para funciones en una superficie de Riemann. Esta extensión, al igual que en el caso de funciones analíticas, es independiente de la carta compleja que consideremos.

Definición 4.1.3. Una función f en X es *meromorfa* en un punto p de X si ésta es o bien analítica en p , o bien tiene singularidad removible en p , o bien tiene polo en p . Diremos que f es meromorfa en $W \subset X$ abierto si esta es meromorfa en cada punto de W .

Sea f definida en una vecindad agujereada de $p \in X$ y analítica en dicha vecindad. Sea $\phi : U \rightarrow V$ una carta en X con $p \in U$. Pensando z como la coordenada local en X cerca de p ;

esto es $z = \phi(x)$ para x cercano a p , tenemos que $f \circ \phi^{-1}$ es analítica en una vecindad agujereada de $z_0 = \phi(p)$. Así podemos expandir $f \circ \phi^{-1}$ en una serie de Laurent sobre z_0 :

$$f(\phi^{-1}(z)) = \sum_n c_n (z - z_0)^n.$$

Esta expansión es llamada la *Serie de Laurent* para f sobre p con respecto a ϕ . Los coeficientes $\{c_n\}$ son llamados *Coefficientes de Laurent*.

Definición 4.1.4. Sea f meromorfa en p , cuya serie de Laurent en una coordenada local z está dada por $\sum_n c_n (z - z_0)^n$. El *orden de f en p* , denotado por $\text{ord}_p(f)$, es el mínimo exponente con coeficiente no nulo que aparece en la serie de Laurent, el cual existe por la definición de función meromorfa.

$$\text{ord}_p(f) = \min\{n \mid c_n \neq 0\}$$

Es fácil ver que el orden de f en p está bien definido, es decir, es independiente de la elección de la coordenada local usada para definir la serie de Laurent. Esto se debe a que la función de transición entre las cartas locales es una función holomorfa con inversa holomorfa.

Lema 4.1.5. Suponga que f es meromorfa en p . Entonces f es analítica en p si y sólo si $\text{ord}_p(f) \geq 0$; f tiene polo en p si y sólo si $\text{ord}_p(f) < 0$; f no tiene cero ni polo en p si y sólo si $\text{ord}_p(f) = 0$.

Ciertos teoremas referentes a funciones holomorfas y meromorfas son heredados inmediatamente de los correspondientes teoremas que conciernen a funciones definidas en conjuntos abiertos en el plano complejo, intuitivamente esto se debe a que una superficie de Riemann es, localmente, de una estructura similar a un dominio del plano complejo. Aquí enunciamos algunos de ellos.

Teorema 4.1.6. (Principio de Identidad) Suponga que f y g son dos funciones meromorfas definidas en un conjunto abierto conexo W de una superficie de Riemann X . Suponga que $f = g$ en un subconjunto $S \subset W$ que tiene punto límite en W . Entonces $f = g$ en W .

Corolario 4.1.7. Sea f una función meromorfa en una superficie de Riemann compacta, la cual no es idénticamente cero. Entonces f tiene un número finito de ceros y polos.

Teorema 4.1.8. Sea f una función meromorfa definida en un conjunto abierto conexo W de una superficie de Riemann X . Si f no es idénticamente cero, entonces los ceros y polos de f forman un subconjunto discreto de W .

Teorema 4.1.9. (Principio del Módulo Máximo) Sea f una función analítica en un conjunto abierto conexo W de una superficie de Riemann X . Suponga que existe un punto $p \in W$ tal que $|f(x)| \leq |f(p)|$ para todo $x \in W$. Entonces f es constante en W .

Teorema 4.1.10. Sea X una superficie de Riemann compacta. Suponga que f es analítica en todo X . Entonces f es una función constante.

4.2. Ejemplos de Funciones Meromorfas

En esta sección estudiaremos la forma de las funciones meromorfas en algunas superficies de Riemann. Usaremos fuertemente los teoremas vistos al final de la sección anterior.

Teorema 4.2.1. Una función en la *Esfera de Riemann* es meromorfa si y sólo si es una función racional; esto es, una función compleja en la esfera de Riemann es meromorfa si y sólo si puede expresarse como cociente de dos polinomios complejos con el denominador no idénticamente cero.

Demostración:

Observamos en primera instancia que una función racional $r(z) = p(z)/q(z)$, con $p(z)$ y $q(z)$ polinomios complejos, es meromorfa en la Esfera de Riemann, en efecto, en todos los puntos salvo los ceros de q la función r es analítica, mientras que en los ceros de q , r o bien tiene polos, o bien tiene singularidad removible, y por lo tanto se concluye que r es meromorfa.

Para mostrar el converso supongamos que tenemos f una función meromorfa en la Esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ . Como \mathbb{C}_∞ es compacto, f tiene finitos polos y ceros. Sean $\{\lambda_i\}$ el conjunto de ceros y polos en el plano complejo \mathbb{C} y asuma que $\text{ord}_{z=\lambda_i}(f) = e_i$. Considere la función racional

$$r(z) = \prod_i (z - \lambda_i)^{e_i}$$

el cual tiene los mismos polos y ceros, con los mismos órdenes, que f en el plano complejo. Sea $g(z) = f/r(z)$; g es función meromorfa en \mathbb{C}_∞ , la cual no tiene ceros ni polos en el plano. Así, vista como función en \mathbb{C} , es analítica en todas partes y luego tiene expansión en serie de Taylor

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

la cual converge en todo \mathbb{C} . Notar que g es también meromorfa en $z = \infty$. En términos de la coordenada $w = 1/z$ en ∞ tenemos

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^{-n}$$

y como ésta es meromorfa en $w = 0$, se tiene que g sólo tiene finitos términos no nulos, entonces g es polinomio en z .

Si el polinomio g es no constante entonces éste debe tener ceros en \mathbb{C} lo cual es una contradicción. Luego g es constante y por tanto f es una función racional.

□

Corolario 4.2.2. Sea f cualquier función meromorfa no constante en \mathbb{C}_∞ . Entonces

$$\sum_p \text{ord}_p(f) = 0.$$

Demostración:

Por el teorema anterior podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f(z) = p(z)/q(z)$, una función racional en la esfera de Riemann.

Como la esfera de Riemann es compacta podemos factorizar p y q de modo que f se escriba únicamente como

$$f(z) = c \prod_i (z - \lambda_i)^{e_i}$$

donde c es una constante no nula, $\{\lambda_i\}$ es el conjunto de números complejos distintos entre sí que representan las raíces de los polinomios p y q , y cada e_i es la multiplicidad de las raíces. Es claro que para cada $p \in \mathbb{C}_\infty$ que no sea cero ni polo se tiene que $\text{ord}_p(f) = 0$. Además, $\text{ord}_{z=\lambda_i}(f) = e_i$ para cada i y $\text{ord}_\infty(f) = \partial q - \partial p = -\sum_i e_i$. Por lo tanto

$$\sum_{p \in \mathbb{C}_\infty} \text{ord}_p(f) = 0.$$

□

Al igual que en la esfera de Riemann, cuando estudiamos las funciones meromorfas definidas en el toro complejo, nos damos cuenta que toda función meromorfa es cociente de ciertas funciones analíticas del toro. Estudiemos cuales son éstas.

Fijemos τ un complejo en la mitad superior del plano y consideremos el reticulado $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. Formemos el toro complejo $X = \mathbb{C}/L$. Sabemos que \mathbb{C}/L es espacio cociente, entonces formaremos funciones meromorfas en \mathbb{C}/L considerando ciertas funciones meromorfas en \mathbb{C} . En primera instancia podríamos pensar que éstas funciones en \mathbb{C} son L -periódicas. Se define una función f como L -periódica si para cada $c \in L$ se tiene $f(z + c) = f(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Un problema de esto, es que las funciones analíticas L -periódicas en \mathbb{C} son necesariamente constantes. La idea entonces es considerar en primera instancia funciones analíticas que no sean L -periódicas, que al hacer cociente entre ellas queden funciones meromorfas L -periódicas en \mathbb{C} y que finalmente descendan a funciones meromorfas en \mathbb{C}/L no constantes necesariamente.

Definamos entonces

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i[n^2\tau + 2nz]).$$

Esta serie converge absolutamente y uniformemente en subconjuntos compactos de \mathbb{C} . En efecto, sea $\tau = \tau_R + i\tau_I$ el complejo τ escrito como su parte real mas i por su parte imaginaria, y sea $z = x + iy$, entonces

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i[n^2\tau + 2nz]) \right| &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\exp(\pi i[n^2\tau + 2nz])| \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\exp(\pi i[n^2\tau_R + 2nx])| |\exp(-\pi n[\tau_I n + 2y])| \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\exp(-\pi n[\tau_I n + 2y])|
\end{aligned}$$

En la cual, la última expresión converge al compararla, usando el cociente de los términos generales adecuadamente, con la serie de término general $a_n = 1/n^2$. Es decir, $\theta(z)$ converge para cada $z \in \mathbb{C}$, por tanto la función $\theta(z)$ es analítica en todo \mathbb{C} .

Por otro lado, $\theta(z+1) = \theta(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$. En efecto

$$\begin{aligned}
\theta(z+1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i[n^2\tau + 2n(z+1)]) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i[n^2\tau + 2nz]) \exp(2n\pi i) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i[n^2\tau + 2nz]) [\cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n)] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i[n^2\tau + 2nz]) \\
&= \theta(z).
\end{aligned}$$

Por tanto $\theta(z)$ es periódica.

Necesitamos estudiar el comportamiento de θ bajo traslaciones vía el reticulado, es decir, nos queda calcular $\theta(z+\tau)$ para $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\theta(z+\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i[n^2\tau + 2n(z+\tau)]) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i[(n^2 + 2n)\tau + 2nz]) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i[(n^2 + 2n + 1)\tau - \tau + 2(n+1)z - 2z]) \\
&= \exp(-\pi i(\tau + 2z)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i[(n+1)^2\tau + 2(n+1)z]) \\
&= \exp(-\pi i(\tau + 2z))\theta(z).
\end{aligned}$$

De lo anterior podemos deducir algunas cosas. De partida la función exponencial no se anula nunca, por tanto, z_0 será un cero de $\theta(z)$ si y sólo si $z_0 + m + n\tau$ es un cero de $\theta(z)$ para cada $m, n \in \mathbb{Z}$. Además, el orden del cero de θ en z_0 será el mismo orden del cero en $z_0 + m + n\tau$.

A modo de determinar los ceros de la función θ , usaremos el *Principio del Argumento*. Sabemos que θ es analítica en \mathbb{C} por lo que no tiene polos. Por tanto, para calcular la cantidad de ceros, tenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\theta'(z)}{\theta} dz = Z$$

con Z la cantidad de ceros y γ el camino que determina el paralelogramo fundamental.

Sabemos por la fórmula determinada anteriormente para la expresión $\theta(z + \tau)$, que

$$\theta'(z + \tau) = -2\pi i \exp(-\pi i[\tau + 2z])\theta(z) + \theta'(z) \exp(-\pi i[\tau + 2z])$$

es decir

$$\frac{\theta'(z + \tau)}{\theta(z + \tau)} = -2\pi i + \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}.$$

Se define entonces γ como $\gamma = \sum_{i=1}^4 \gamma_i$, de donde

- $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} ; t \mapsto t$
- $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} ; t \mapsto 1 + t\tau$
- $\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} ; t \mapsto 1 + \tau - t$
- $\gamma_4 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} ; t \mapsto (1 - t)\tau$

como muestra la figura

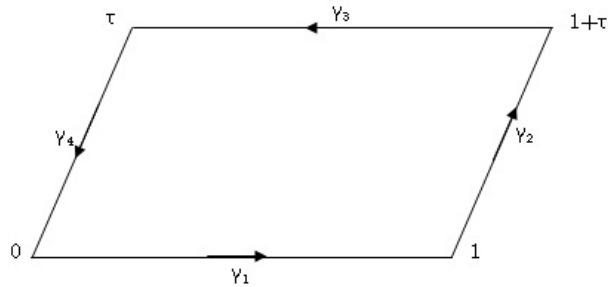


Figura 6: Comportamiento local

Luego, calculado separadamente la integral por γ_3 y γ_4 , tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3} \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\theta'(\gamma_3(t))}{\theta(\gamma_3(t))} (-1) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\theta'(\gamma_1(1-t) + \tau)}{\theta(\gamma_1(1-t) + \tau)} (-1) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma_1} \frac{\theta'(z + \tau)}{\theta(z + \tau)} dz \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\theta'(z + \tau)}{\theta(z + \tau)} dz \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \left(-2\pi i + \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} \right) dz \\
&= \int_{\gamma_1} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} dz \\
&= 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} dz
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_4} \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\theta'(\gamma_4(t))}{\theta(\gamma_4(t))} (-\tau) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\theta'(\gamma_2(1-t) - 1)}{\theta(\gamma_2(1-t) - 1)} (-\tau) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma_2} \frac{\theta'(z - 1)}{\theta(z - 1)} dz \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{\theta'(z - 1)}{\theta(z - 1)} dz \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} dz
\end{aligned}$$

Por tanto, sumando las integrales correspondientes se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} dz &= \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} dz \\
&= 1
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que en el interior de γ , es decir, en el paralelogramo fundamental, hay exactamente un cero de la función θ , además, este cero es simple. Sin embargo esto ocurre siempre y cuando θ no se anule en γ . Para mostrar esto consideremos el camino $\gamma' = \gamma + h$, la traslación de γ en el complejo h , y $|h|$ suficientemente pequeño de modo que θ no se anule en γ' ; dicho h existe pues θ es analítica en \mathbb{C} y por tanto los ceros de θ son discretos. El análisis se repite para la curva γ' y se demuestra que en γ la función θ no se anula.

Queda propuesto mostrar que el único cero de θ en el interior de γ es $z_0 = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$. Por tanto, naturalmente, los únicos ceros en \mathbb{C} son de la forma $z_0 + m + n\tau$ con $m, n \in \mathbb{Z}$.

Consideremos ahora la siguiente función

$$\theta^{(\chi)}(z) = \theta(z - (1/2) - (\tau/2) - \chi)$$

la cual tiene ceros simples en el conjunto de puntos $\chi + L$. Notemos además que

$$\theta^{(\chi)}(z + 1) = \theta^{(\chi)}(z) \text{ y que } \theta^{(\chi)}(z + \tau) = -\exp(-2\pi i[z - \chi])\theta^{(\chi)}(z).$$

y consideremos la función

$$R(z) = \frac{\prod_i \theta^{(x_i)}(z)}{\prod_j \theta^{(y_j)}(z)}$$

La función R es meromorfa en \mathbb{C} , es periódica, pues $R(z + 1) = R(z)$. Queremos que sea L -periódica, lo cual ocurre si y sólo si $R(z + \tau) = R(z)$. Notemos que

$$\begin{aligned} R(z + \tau) &= \frac{\prod_{i=1}^m \theta^{(x_i)}(z + \tau)}{\prod_{j=1}^n \theta^{(y_j)}(z + \tau)} \\ &= (-1)^{m-n} \frac{\prod_{i=1}^m \exp(-2\pi i[z - x_i])\theta^{(x_i)}(z)}{\prod_{j=1}^n \exp(-2\pi i[z - y_j])\theta^{(y_j)}(z + \tau)} \\ &= (-1)^{m-n} \exp(-2\pi i[(m-n)z + \sum_j y_j - \sum_i x_i])R(z). \end{aligned}$$

es decir, necesitamos que el factor

$$(-1)^{m-n} \exp(-2\pi i[(m-n)z + \sum_j y_j - \sum_i x_i])$$

sea idénticamente 1 para cada z . Esto fuerza que $m = n$ y que $\sum_j y_j - \sum_i x_i \in \mathbb{Z}$. Cabe destacar que los ceros de R son de la forma $x_i + L$ y los polos son de la forma $y_j + L$.

Las condiciones anteriores son suficientes para probar la siguiente proposición.

Proposición 4.2.3. Sea d un natural fijo, y escojamos cualquier par de conjuntos de números complejos $\{x_i\}$ y $\{y_j\}$, cada uno con d elementos tal que $\sum_i x_i - \sum_j y_j$ es un entero. Entonces la función $R(z)$ definida anteriormente es meromorfa y L -periódica en \mathbb{C} , por tanto desciende a una función meromorfa en \mathbb{C}/L .

Resulta necesario hacer notar que hemos encontrado funciones meromorfas que son de ciertos toros complejos en particular, a saber, los toros complejos que se definen por medio de un reticulado de la forma $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. Veremos más adelante que todo toro complejo es isomorfo a uno con reticulado $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, por tanto, las funciones meromorfas en un toro complejo cualquiera serán, en realidad, funciones meromorfas definidas en un toro complejo con el reticulado de la forma $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$.

4.3. Funciones Holomorfas entre Superficies de Riemann

Ahora que tenemos una idea clara del concepto de función analítica en una superficie de Riemann, la definición de función holomorfa entre Superficies de Riemann resulta natural. Nuevamente la idea central es fabricarnos una función compleja de variable compleja usando las cartas en cada superficie mediante la composición de éstas junto a la función que relaciona las superficies. Sean X e Y superficies de Riemann.

Definición 4.3.1. Una función $F : X \rightarrow Y$ se dice *holomorfa en* $p \in X$ si y sólo si existen cartas complejas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ en X con $p \in U_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ en Y con $F(p) \in U_2$ tal que la composición $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(p)$.

Si F está definida en un subconjunto abierto W de X , entonces F será *holomorfa en* W si F es holomorfa en cada punto de W .

Inmediatamente, al igual con las funciones analíticas, se deduce que una función holomorfa entre superficies de Riemann es independiente de la elección de cartas complejas debido a la noción de compatibilidad que hay entre ellas.

Definición 4.3.2. Una función $F : X \rightarrow Y$ se dice *meromorfa en* $p \in X$ si y sólo si existen cartas complejas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ en X con $p \in U_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ en Y con $F(p) \in U_2$ tal que la composición $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es meromorfa en $\phi_1(p)$.

Si F está definida en un subconjunto abierto W de X , entonces F será *meromorfa en* W si F es meromorfa en cada punto de W .

Definición 4.3.3. Un *Isomorfismo* entre superficies de Riemann es una función holomorfa $F : X \rightarrow Y$ la cual es biyectiva. Un isomorfismo entre una superficie de Riemann X consigo misma se llama *Automorfismo* de X . De existir un isomorfismo entre X e Y decimos que X e Y son *isomorfos*.

Varios teoremas que conciernen a funciones holomorfas son consecuencia inmediata de los correspondientes teoremas entre funciones analíticas.

Proposición 4.3.4. Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa e inyectiva entre superficies de Riemann. Entonces F es un isomorfismo entre X y su imagen $F(X)$.

Proposición 4.3.5. (Principio de Identidad) Sean F y G dos funciones holomorfas entre superficies de Riemann X e Y . Si $F = G$ en un subconjunto S de X con un punto límite en X , entonces $F = G$ en X .

Proposición 4.3.6. (Teorema de la Función Abierta) Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann. Entonces F es función abierta.

Proposición 4.3.7. Sea X una superficie de Riemann compacta y sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante. Entonces Y es compacta y F es sobre.

Demostración:

Como F es holomorfa y X es abierto en si mismo, $F(X)$ es abierto en Y por el teorema de la función abierta. Por otro lado X es compacto, luego $F(X)$ es compacto, pero como Y es hausdorff se tiene que $F(X)$ es cerrado. Luego $F(X)$ es abierto y cerrado, pero Y es conexo por tanto $F(X) = Y$. Así F es sobre e Y es compacto.

□

Proposición 4.3.8. Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann. Entonces para cada $y \in Y$, la preimagen $F^{-1}(y)$ es un subconjunto discreto de X . En particular, si X e Y son compactos, entonces $F^{-1}(y)$ es un conjunto no vacío y finito para cada $y \in Y$.

Un resultado interesante es la relación entre las funciones meromorfas y las funciones holomorfas a la esfera de Riemann.

Sea f una función meromorfa en X superficie de Riemann. Los valores que f puede tomar son números complejos. En un polo de f el valor natural de ésta es ∞ . Definamos $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \in \mathbb{C} & \text{si } x \text{ no es polo de } f \\ \infty & \text{si } x \text{ es polo de } f \end{cases}$$

Es fácil ver que F es función holomorfa. De hecho, se tiene la siguiente correspondencia.

Proposición 4.3.9. La construcción anterior induce una correspondencia 1-1 entre

$$\{ \text{Funciones meromorfas } f \text{ en } X \} \text{ y } \{ \text{Funciones holomorfas } F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty \text{ con } F \neq \infty \}$$

4.4. Propiedades Globales de Funciones Holomorfas

Una función holomorfa entre dos superficies de Riemann tiene una forma normal en algunas coordenadas locales; esto es, esencialmente, cada función se observa localmente como una potencia.

Teorema 4.4.1. (Forma Local Normal) Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa definida en $p \in X$, la cual es no constante. Entonces existe un único entero $m \geq 1$ el cual satisface la siguiente propiedad: Para cada carta $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ en Y centrada en $F(p)$, existe una carta $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ en X centrada en p tal que $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^m$.

Este teorema nos dice básicamente que cerca de p existen exactamente m preimágenes distintas entre sí de un punto cercano a $F(p)$.

Demostración:

Fijemos una carta ϕ_2 en Y centrada en $F(p)$, y escojamos cualquier carta $\psi : U \rightarrow V$ centrada en p . Entonces la expansión en serie de Taylor para la función de transición $T(w) = \phi_2(F(\psi^{-1}(w)))$ debe ser de la forma

$$T(w) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^i$$

con $c_m \neq 0$, $m \geq 1$ pues $T(0) = 0$. Así tenemos que $T(w) = w^m S(w)$ donde $S(w)$ es una función holomorfa en $w = 0$ y $S(0) \neq 0$. En este caso existe una función $R(w)$ holomorfa cerca de 0 tal que $R(w)^m = S(w)$, entonces $T(w) = (wR(w))^m$. Sea $\eta(w) = wR(w)$; como $\eta'(0) \neq 0$, se tiene que cerca de 0 la función η es invertible y holomorfa. Así, la composición $\phi_1 = \eta \circ \psi$ es también carta local definida en X y centrada en p . Si pensamos en η como una nueva coordenada z ; esto es, $z = \eta(w)$, entonces es claro que z y w se relacionan por $z = wR(w)$. Así

$$\begin{aligned} \phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) &= \phi_2(F(\psi^{-1}(\eta^{-1}(z)))) \\ &= T(\eta^{-1}(z)) \\ &= T(w) \\ &= (wR(w))^m \\ &= z^m \end{aligned}$$

de donde se tiene lo pedido.

La unicidad de m proviene de que si T es la función de transición tal que $T(z) = z^m$ para cartas ϕ_1 definida en una vecindad U de p y ϕ_2 definida en una vecindad V de $F(p)$, se tiene que T tiene localmente un comportamiento m es a 1; esto es, para cada $w \in \phi_2(V)$ existen exactamente m preimágenes en $\phi_1(U)$. Al ser las cartas homeomorfismos el comportamiento m es a 1 se mantiene para U y V .

□

Definición 4.4.2. La *multiplicidad* de F en p , denotada por $\text{mult}_p(F)$, es el único entero m tal que existen coordenadas locales centradas en p y $F(p)$ con F de la forma $z \mapsto z^m$.

Definición 4.4.3. Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante. Un punto $p \in X$ es un *punto de ramificación* para F si $\text{mult}_p(F) \geq 2$. Un punto $y \in Y$ es un *punto rama* para F si éste es imagen de un punto de ramificación para F .

Podemos asegurar que los conjuntos de puntos de ramificación y puntos rama para una función holomorfa entre superficies de Riemann forman subconjuntos discretos del dominio y recorrido respectivamente. En efecto, sea $F : X \rightarrow Y$ función holomorfa no constante entre superficies de Riemann, supongamos que los puntos de ramificación forman un conjunto de puntos con un punto límite en X , sea $p \in X$ dicho punto límite, entonces por la Forma Local Normal aseguramos que en alguna vecindad de p , F tiene la forma $z \mapsto z^m$ para algún entero positivo m , es decir, todo punto cercano a p en dicha vecindad tiene multiplicidad 1, lo que contradice nuestra hipótesis. Por otro lado, si los puntos rama de F forman un conjunto con punto límite en $F(X)$, llamemos q a dicho punto, entonces nuevamente por la Forma Local Normal se tiene

que todo punto cercano a q tiene una cantidad finita de preimágenes distintas entre sí, lo que contradice el hecho de que q es punto límite de puntos rama.

Notemos que $\text{mult}_p(F) \geq 1$ siempre. Supongamos ahora que z es una coordenada local cerca de p y que w es coordenada local cerca de $F(p)$, donde z_0 se corresponde con p y w_0 se corresponde con $F(p)$. Así $w = h(z)$ para alguna función holomorfa h definida en alguna vecindad de z_0 . Luego

$$h(z) = h(z_0) + \sum_{i=m}^{\infty} c_i(z - z_0)^i$$

lo anterior se deduce de que $z - z_0$ y $w - w_0$ son coordenadas locales centradas en p y $F(p)$ respectivamente y luego aplicamos el teorema 4.1.1., notamos también que $c_m \neq 0$. Finalmente podemos deducir el siguiente lema.

Lema 4.4.4. Con la notación anterior, la multiplicidad de F en p es el orden en que se anula la derivada $h'(z_0)$ más uno:

$$\text{mult}_p(F) = 1 + \text{ord}_{z_0}(dh/dz).$$

Ejemplo 4.4.5. Sea X una curva plana suave definida por $f(z, w) = 0$. Se define $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}$ por la proyección canónica en el eje z : $\pi(z, w) = z$. Aseguramos que π tiene punto de ramificación en $p = (z_0, w_0) \in X$ si y sólo si $(\partial f/\partial w)(p) = 0$.

Supongamos primero que $(\partial f/\partial w)(p) \neq 0$. Entonces π es carta local para X en una vecindad de p y luego se tiene multiplicidad uno pues una carta es un homeomorfismo.

Supongamos entonces que $(\partial f/\partial w)(p) = 0$. Entonces como X es suave en p se debe tener $(\partial f/\partial z)(p) \neq 0$, y luego la función w , que es proyección sobre la segunda coordenada, es carta local para X en una vecindad de p . Por Teorema de la Función Implícita, cerca de p , X es localmente el gráfico de una función $g(w)$; esto es, existe $U \subset X$ vecindad de p de modo que $U = \{(g(w), w) | f(g(w), w) = 0\}$. Así $f(g(w), w)$ es idénticamente cero en una vecindad de w_0 , por tanto su derivada respecto a w se anula en dicha misma vecindad, es decir $(\partial f/\partial z)g'(w) + (\partial f/\partial w)$ es idénticamente cero en una vecindad de p . Luego se deduce que $g'(w_0) = 0$. Pero $g(w)$ es exactamente una fórmula local para la función π , así por el lema anterior tenemos que π tiene ramificación en p .

Lema 4.4.6. Sea f una función meromorfa en una superficie de Riemann X , con su función holomorfa $F : X \rightarrow \mathbb{C}_{\infty}$.

- a. Si $p \in X$ es un cero de f , entonces $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f)$.
- b. Si p es un polo de f , entonces $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$.
- c. Si p no es cero ni polo de f , entonces $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$.

Demostración:

Es claro que el comportamiento de la función f en torno a p será idéntico localmente al considerar cualquier carta centrada en p y estudiar el comportamiento de la función transición. Luego, si $f(p) = z_0$, p no es polo, se tiene que la función $f - z_0$ tiene un cero en p , por tanto si aplicamos el lema 4.4.4. a nuestra función transición vemos que $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$.

Así mismo, si p es un polo de f , entonces el orden de f en p será negativo y p será un cero de la función $1/f$; es claro aquí que $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$ en este caso.

□

Hemos estudiado algunas propiedades globales para funciones holomorfas entre superficies de Riemann cualesquiera. Sin embargo las funciones holomorfas entre superficies de Riemann compactas satisfacen algunas propiedades muy importantes que nos permite relacionar a dichas superficies.

Proposición 4.4.7. Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Para cada $y \in Y$, definimos $d_y(F)$ como la suma de las multiplicidades de F en los puntos de X que son preimágenes de y (notar que la suma es finita por compacidad de X)

$$d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}_p(F).$$

Entonces $d_y(F)$ es constante, independiente de y .

Demostración:

Fijemos $y \in Y$. Como X e Y son compactos se tiene que el conjunto de preimágenes de y es finito, por tanto $F^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Escojamos alguna coordenada local w en Y centrada en y . Por la Forma Normal Local podemos escoger coordenadas locales $\{z_i\}$ en X , con z_i centrada en x_i para cada $i = 1, \dots, n$, tal que en una vecindad de x_i la función F envía z_i a $w = z_i^{m_i}$.

Supongamos ahora que arbitrariamente cerca a y existen preimágenes que no están en ninguna de las vecindades de los puntos x_i . De esta manera encontraremos una sucesión de puntos de X , que no están en ninguna de las vecindades de los x_i tales que sus imágenes convergen a y . Como X es compacto, dicha sucesión tiene una subsucesión convergente, llamémosla $\{p_n\}$; esta secuencia converge a un punto x y la secuencia de imágenes $\{F(p_n)\}$ converge a y . Como F es continua se tiene que $F(x) = y$ lo cual contradice que la sucesión de puntos $\{p_n\}$ no yace en ninguna de las vecindades de los puntos x_i . Esto prueba que las preimágenes de puntos en una vecindad de y están siendo consideradas en las vecindades de los x_i .

Observemos ahora que si tenemos una función $g : D \rightarrow D$ tal que $g(z) = z^m$, con m un entero positivo, donde D es el disco abierto unitario. Entonces la multiplicidad de cero es m con una sola preimagen y cada $w \neq 0$ tiene exáctamente m preimágenes de multiplicidad uno. Esto quiere decir que $d_w(g)$ es constante.

En nuestro caso, tenemos que cada coordenada local escogida tiene la propiedad anterior, por tanto resulta evidente que $d_y(F)$ es localmente constante. Por otro lado tenemos que Y es conexo, de donde se tiene que $d_y(F)$ es constante en todo Y .

□

Definición 4.4.8. Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. El *grado* de F , denotado por $\text{deg}(F)$, es el entero $d_y(F)$ para cualquier $y \in Y$.

Sabemos que la multiplicidad de una función holomorfa es siempre mayor o igual a uno. Por tanto de la definición anterior si F tiene grado uno, para cualquier y en la imagen de la función se tiene $\sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}_p(F) = 1$, de donde es necesario que haya un solo sumando con valor uno. Como y es arbitrario se tiene que todos los puntos en la imagen tienen una sola preimagen y esta tiene multiplicidad uno.

Lo anterior se reduce al siguiente corolario.

Corolario 4.4.9. Una función holomorfa entre dos superficies de Riemann compactas es un isomorfismo si y sólo si ésta tiene grado uno.

Proposición 4.4.10. Sea f una función meromorfa no constante en una superficie de Riemann compacta X . Entonces

$$\sum_p \text{ord}_p(f) = 0.$$

Demostración:

Sea $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ la función holomorfa asociada entre X y la esfera de Riemann. Sean $\{x_i\}$ los ceros de f y sean $\{y_j\}$ los polos de f . Sea d el grado de la función F . Entonces por definición tenemos:

$$d = \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) = \sum_j \text{mult}_{y_j}(F)$$

Por otro lado sabemos que los únicos puntos de X cuyos órdenes son no nulos son los ceros y los polos de f . Por otra parte por lema 4.4.6. se tiene

$$\text{mult}_{x_i}(F) = \text{ord}_{x_i}(f) \text{ y } \text{mult}_{y_j}(F) = -\text{ord}_{y_j}(f).$$

Así

$$\begin{aligned} \sum_p \text{ord}_p(f) &= \sum_i \text{ord}_{x_i}(f) + \sum_j \text{ord}_{y_j}(f) \\ &= \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) - \sum_j \text{mult}_{y_j}(F) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

4.5. La Fórmula de Hurwitz

Sea S una 2-variedad real compacta. Una *triangulación* de S es una descomposición de S en subconjuntos cerrados, cada uno de estos homeomorfo a un triángulo, tales que estos son disjuntos, o comparten un único vértice, o comparten todo un mismo lado. Esto da paso a la siguiente definición.

Definición 4.5.1. Sea S una 2-variedad real compacta. Suponga que una triangulación S está dada, con v vértices, l lados y t triángulos. El *Número de Euler* es el entero $e(S) = v - l + t$.

Uno de los resultados más importantes es que el número de Euler no depende de la triangulación escogida. Además, para una variedad 2-dimensional compacta y orientable de género g se tiene que el número de Euler es $2 - 2g$.

Recordemos que toda superficie de Riemann es una 2-variedad, arco-conexa y orientable difeomorfa a un g -toro. Esto significa que a cada superficie de Riemann podemos asociarle su número de Euler (evidentemente único).

El grado de una función holomorfa entre superficies de Riemann compactas, combinada con el número de Euler, nos entregan una importante relación entre el genero del dominio y rango junto a los puntos de ramificación de la función. Esta relación es sumamente importante en la teoría de superficies de Riemann compactas pues nos entrega una herramienta para diferenciarlas en el sentido analítico.

Teorema 4.5.2. (Fórmula de Hurwitz) Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Entonces

$$2g(X) - 2 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1].$$

Demostración:

Notemos que como X es compacto, el conjunto de puntos de ramificación es finito. Esto quiere decir que la suma $\sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1]$ es finita.

Consideremos una triangulación de Y de modo tal que cada punto rama de F sea un vértice. Asumamos que existen v vértices, l lados y t triángulos. Llevamos la triangulación a X vía F y asumamos que existen v' vértices, l' lados y t' triángulos en X . Es claro que cada punto de ramificación de F es un vértice en X .

Como no hay más puntos de ramificación en otros puntos del triángulo, cada triángulo en Y corresponde a $\deg(F)$ triángulos en X . Así $t' = \deg(F)t$ y por un argumento similar, $l' = \deg(F)l$.

Fijemos ahora un vértice $q \in Y$. El número de preimágenes de q en X es $|F^{-1}(q)|$ cuyo valor puede escribirse como

$$\begin{aligned} |F^{-1}(q)| &= \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 \\ &= \deg(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - \text{mult}_p(F)]. \end{aligned}$$

Así la cantidad de vértices en X será igual a la cantidad de preimágenes de los vértices en Y . Esto es

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{\text{vértice } q \text{ de } Y} \deg(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - \text{mult}_p(F)] \\ &= v \deg(F) + \sum_{\text{vértice } q \text{ de } Y} \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - \text{mult}_p(F)] \\ &= v \deg(F) + \sum_{\text{vértice } p \text{ de } X} [1 - \text{mult}_p(F)] \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
2g(X) - 2 &= -e(X) \\
&= -v' + e' - t' \\
&= \sum_{\text{vértice } q \text{ de } Y} \deg(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - \text{mult}_p(F)] \\
&= -\deg(F)v + \sum_{\text{vértice } p \text{ de } X} [\text{mult}_p(F) - 1] + \deg(F)e - \deg(F)t \\
&= -\deg(F)e(Y) + \sum_{\text{vértice } p \text{ de } X} [\text{mult}_p(F) - 1] \\
&= \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1],
\end{aligned}$$

de donde la última igualdad se satisface pues los únicos puntos de ramificación de F son algunos de los vértices de X .

□

Ejemplo 4.5.3. Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre dos superficies de Riemann. Entonces se pueden hacer las siguientes afirmaciones

- Si $g(X) = g(Y) \geq 2$ entonces F es un isomorfismo.

Sea $g = g(X) = g(Y)$. Usando la fórmula de Hurwitz tenemos

$$2g - 2 = \deg(F)(2g - 2) + \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1]$$

es decir

$$(\deg(F) - 1)(2g - 2) + \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1] = 0.$$

Por otra parte, como $g \geq 2$ tenemos que $2g - 2 \geq 0$ y luego tenemos suma de términos no negativos que da cero. Es decir cada término debe ser cero. Finalmente se concluye que $\deg(F) = 1$ por lo que por corolario 4.4.9. se concluye que F es isomorfismo.

- Si X y Y son ambas de género 1, entonces F no tiene puntos de ramificación.

Si reemplazamos el género de ambas en la fórmula de Hurwitz nos queda

$$\sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1] = 0$$

de donde se deduce que $\text{mult}_p(F) = 1$ para cada $p \in X$.

- $g(Y) \leq g(X)$ siempre.

En efecto, si $g(Y) > g(X)$ entonces $\sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1] < 0$ pues $\deg(F) \geq 1$, lo que contradice el hecho de que dicho término sea suma de cantidades no negativas para cada $p \in X$.

5. Toros Complejos y Sus Propiedades

En la sección anterior mostramos que en una superficie de Riemann compacta se tiene que la suma de los órdenes de una función en cada punto es igual a cero, resultado que probamos en el caso de la esfera de Riemann y en su caso general usando teoría de funciones holomorfas entre superficies de Riemann compactas. Ahora tenemos todas las herramientas para mostrar este resultado para el caso particular del toro complejo.

Analizaremos además como se relacionan los toros complejos mediante funciones holomorfas definidas entre ellos. Veremos además los casos en los cuales podemos hablar de isomorfismos entre los toros complejos en base a los reticulados que los definen.

5.1. Funciones Meromorfas en el Toro Complejo

Proposición 5.1.1. Todo toro complejo de la forma \mathbb{C}/L , con L un reticulado, es isomorfo a un toro de la forma $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$, donde τ es un número complejo con parte imaginaria positiva.

Demostración:

La demostración la haremos por tres partes.

Supongamos primero que L y L' son dos reticulados en \mathbb{C} tales que $L \subset L'$. Mostraremos que la función natural que lleva $\mathbb{C}/L \rightarrow \mathbb{C}/L'$ es holomorfa y es isomorfismo si y sólo si $L = L'$.

Sea $p \in \mathbb{C}/L$. Es decir, $p = z_0 + L$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$. Supongamos además que la función natural, $F : \mathbb{C}/L \rightarrow \mathbb{C}/L'$, lleva p en $F(p) = z_1 + L'$ con $z_1 \in \mathbb{C}$.

En la primera sección vimos que las cartas complejas del atlas en el toro se definen mediante cierto ε . Escogemos $\phi_1 : U_1 \rightarrow D_{z_0}$ en \mathbb{C}/L de modo que $\phi_1(p) = z_0$ y D_{z_0} es la bola centrada en z_0 de radio ε_1 . Escogemos en $F(p)$ la carta local $\psi : V \rightarrow D'_{z_1}$ de modo que $\psi(F(p)) = z_1$ y D'_{z_1} es la bola centrada en z_1 de radio ε_2 . Sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, entonces $\phi = \phi_1|_U$, con $U = \phi_1^{-1}(B(z_0, \varepsilon))$, es carta local en $p \in \mathbb{C}/L$.

Por la elección de ε podemos asegurar que la función $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : B(z_0, \varepsilon) \rightarrow D'_{z_1}$ es una traslación en el plano complejo; esto es, $\psi \circ F \circ \phi^{-1}(z) = z + w_0$, con w_0 algún complejo tal que $z_1 - w_0 \in L'$. Ciertamente se concluye que F es holomorfa en p y luego en todo \mathbb{C}/L .

La última afirmación queda propuesta al lector.

Sea ahora $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Aseguramos que αL es reticulado en \mathbb{C} y que la función $\phi : \mathbb{C}/L \rightarrow \mathbb{C}/(\alpha L)$, el cual envía $z + L$ a $(\alpha z) + (\alpha L)$, es isomorfismo.

En efecto, ϕ está bien definida pues si $z_1 = z_2$ en \mathbb{C}/L , entonces $z_1 - z_2 \in L$, por lo que $\alpha(z_1 - z_2) \in \alpha L$, y luego $\alpha z_1 = \alpha z_2$ en αL . La función ϕ es sobre pues si $z_0 \in \mathbb{C}/(\alpha L)$, entonces $z_0/\alpha \in \mathbb{C}/L$ es preimagen vía ϕ . Además, si $\alpha z_1, \alpha z_2 \in \mathbb{C}/(\alpha L)$ tales que $\alpha z_1 = \alpha z_2$, entonces $\alpha z_1 - \alpha z_2 \in \alpha L$ y luego $z_1 - z_2 \in L$ por lo que $z_1 = z_2 \in \mathbb{C}/L$.

No es difícil probar que las funciones transición definidas vía ϕ entre las superficies de Riemann son precisamente de la forma $z \mapsto \alpha z + w_0$, la cual ciertamente es analítica.

Sea entonces $L = \{mw_0 + nw_1 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. Sin pérdida de generalidad, gracias a la primera parte, supongamos que w_1/w_0 tiene parte imaginaria positiva. Entonces para $\alpha = 1/w_0$ y $\tau =$

w_1/w_0 , la segunda afirmación demuestra lo pedido.

□

Proposición 5.1.2. Sean $\{p_i\}$ y $\{q_j\}$ dos conjuntos de d puntos en un toro complejo $X = \mathbb{C}/L$ tales que $\sum_i p_i = \sum_j q_j$ en el grupo cociente de X . Muestre que existen números $\{x_i\}$ y $\{y_j\}$ en \mathbb{C} de modo que $\pi(x_i) = p_i$, $\pi(y_j) = q_j$ para cada i con $\sum_i x_i = \sum_j y_j$.

Demostración:

Fijar x_i alguna preimágen de p_i , con $i = 1, \dots, d-1$; x alguna preimágen de p_d ; y_j alguna preimágen de q_j con $j = 1, \dots, d$. Luego

$$\sum_{i=1}^d p_i - \sum_{j=1}^d q_j = 0 \in X \Leftrightarrow x + \sum_{i=1}^{d-1} x_i - \sum_{j=1}^d y_j = mw_0 + nw_1 \in \mathbb{C}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

sea entonces $x_d = x - (mw_0 + nw_1)$, luego se tiene lo pedido.

□

Las proposiciones anteriores nos entregan las herramientas para demostrar el siguiente lema.

Lema 5.1.3. Sea f cualquier función meromorfa no constante en un toro complejo $X = \mathbb{C}/L$. Entonces

$$\sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) = 0.$$

Demostración:

Consideremos el caso $L = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, con $\text{Im}(\tau) > 0$. Mostraremos para este caso pues en el caso general se reduce a este caso particular gracias a la proposición 5.1.1.

Sea f función meromorfa en X . El lema nos dice que la cantidad de ceros y polos es la misma (contando las repeticiones por el orden). Supongamos que esto es falso, luego, sin pérdida de generalidad podemos suponer que la cantidad de polos es mayor que la de ceros. Sean p_1, \dots, p_n los ceros de f y q_1, \dots, q_m los polos de f , claramente $n < m$.

Agreguemos a la lista de ceros $p_{n+1}, p_{n+2}, \dots, p_m$ con la condición que $\sum_i p_i = \sum_i q_i$ en el grupo cociente de X . Por la proposición 5.1.2. podemos levantar cada p_i a $x_i \in \mathbb{C}$ y cada q_i a $y_i \in \mathbb{C}$ de modo que $\sum_i x_i = \sum_i y_i$ en \mathbb{C} .

Formamos la función $R(z) = \prod_i \theta^{(x_i)}(z) / \prod_j \theta^{(y_j)}(z)$. Como R es meromorfa y L -periódica en \mathbb{C} , podemos considerar a R como una función meromorfa en X . Sus ceros serán exactamente $\{p_i\}$ y $\{q_i\}$, para cada $i = 1, \dots, m$.

Así, formamos la función auxiliar $g = R/f$ la cual no tiene polos y con ceros los puntos p_{n+1}, \dots, p_m . Pero X es compacto, luego g es constante. Como g tiene ceros, entonces esta debe ser idénticamente cero, sin embargo R no lo es, lo cual es una contradicción.

□

Usando parte de la teoría de la sección anterior y parte de lo desarrollado en esta, podemos caracterizar a las funciones meromorfas en un toro complejo.

Proposición 5.1.4. Toda función meromorfa en un toro complejo es cociente de funciones θ trasladadas.

Demostración:

Sea X un toro complejo y f una función meromorfa no constante en X . Por el lema anterior tenemos que existen tantos ceros como polos; sea $\{p_i\}$, $i = 1, \dots, n$, el conjunto de ceros de f y $\{q_i\}$, $i = 1, \dots, n$, el conjunto de polos de f .

Debemos mostrar que $\sum_i p_i = \sum_i q_i$ en el grupo cociente de X . Si esto es cierto entonces, por un argumento similar al expuesto en la demostración del lema anterior, podemos levantar los p_i a $x_i \in \mathbb{C}$ y los q_i a $y_i \in \mathbb{C}$ para cada i , de modo que $\sum_i x_i = \sum_i y_i$. Así formamos la función $R(z) = \prod_i \theta^{(x_i)}(z) / \prod_j \theta^{(y_j)}(z)$, cociente de funciones θ trasladadas, en la cual se tiene la misma cantidad de ceros y polos que f . Por tanto, por un argumento de compacidad para R/f , función sin ceros y polos, se deduce que R/f es constante en X , y luego, f es cociente de funciones θ trasladadas.

Supongamos entonces que $\sum_i p_i \neq \sum_i q_i$ en el grupo cociente de X . Escojamos p_0 y q_0 en X de modo que $\sum_{i=0}^n p_i = \sum_{i=0}^n q_i$ en X . Formamos la función $R(z) = \prod_{i=0}^n \theta^{(x_i)}(z) / \prod_{j=0}^n \theta^{(y_j)}(z)$ como antes, y consideremos la función meromorfa $g = R/f$ en X . Así definida, g tiene exactamente un cero en p_0 y un polo en q_0 , ambos de orden uno, pues todos los otros ceros y polos se cancelan entre sí.

En la sección anterior vimos que existe una correspondencia 1-1 entre funciones meromorfas en X y funciones holomorfas entre X y \mathbb{C}_∞ . Consideremos entonces $G : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ la función holomorfa entre X y la esfera de Riemann que corresponde a g . Como g tiene un cero simple y un polo simple, la función G tiene grado uno, es decir, G es isomorfismo entre X y \mathbb{C}_∞ , lo que es una contradicción pues un toro complejo y la esfera de Riemann no son homeomorfos. Esta contradicción muestra que $\sum_i p_i = \sum_i q_i$ en el grupo cociente de X , lo que completa la demostración. □

5.2. Funciones Holomorfas entre Toros Complejos

Sean L y M reticulados en \mathbb{C} , los cuales definen a toros complejos $X = \mathbb{C}/L$ y $Y = \mathbb{C}/M$. Fijamos $a \in \mathbb{C}$ y consideramos la función traslación $z \mapsto z + a$, la cual desciende a una función $T_a : Y \rightarrow Y$. Además T_a depende de $x_0 = a \bmod M$ (el punto x_0 en el paralelogramo fundamental). Tal automorfismo lo denotaremos por T_{x_0} , el cual tiene inversa T_{-x_0} , y lo llamaremos *traslación* de Y por x_0 .

Sea $F : X \rightarrow Y$ función holomorfa. Podemos asumir que $F(0) = 0$ pues podemos trasladar en Y vía el automorfismo descrito anteriormente. Notemos que por la fórmula de Hurwitz se tiene que $\text{mult}_p = 1$ para cada $p \in X$, por tanto, F es localmente inyectiva y por tanto lo será la composición $F \circ \pi : \mathbb{C} \rightarrow Y$. Por la inyectividad local tenemos que $F \circ \pi$ es función de cubrimiento y, como \mathbb{C} es simplemente conexo, \mathbb{C} es isomorfo al espacio de cubrimiento universal de Y , el cual es $\pi' : \mathbb{C} \rightarrow Y$. Así se asegura la existencia de una función holomorfa $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de modo que

$$F \circ \pi = \pi' \circ G.$$

Como $F(0) = 0$, G debe enviar a 0 a un punto del reticulado M , podemos asumir que $G(0) = 0$, pues la composición vía traslación por puntos del reticulado no afecta a la función

proyección π' .

Notemos además que G debe enviar al reticulado L al reticulado M , así, para cualquier $z \in \mathbb{C}$ y $l \in L$ se tiene

$$G(z+l) = G(z) \text{ mod } M$$

por lo que existe un punto $w(z, l) \in M$ tal que $w(z, l) = G(z+l) - G(z)$. Pero M es discreto y \mathbb{C} es conexo, luego, para l fijo, $w(z, l)$ es independiente de z , por tanto al derivar respecto a z nos queda $w'(z, l) = 0$ y por tanto $G'(z+l) = G'(z)$, es decir, la derivada de G es invariante bajo traslaciones por el reticulado L , por lo que los valores que toma G' se alcanzan todos en el paralelogramo fundamental, y luego, en todo \mathbb{C} (por lo que G' es acotado). Por el Teorema de Liouville aseguramos que G' es constante y por tanto G es lineal. Como $G(0) = 0$, existe constante k tal que $G(z) = kz$.

Como G envía al reticulado L en M , se tiene que $kL \subset M$, por lo que F es un homomorfismo de grupo. Por lo anterior, se demuestra la siguiente proposición.

Proposición 5.2.1. Sean X e Y son toros complejos dados por los reticulados L y M respectivamente. Entonces toda función holomorfa $F : X \rightarrow Y$ es inducida por una función lineal $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forma $G(z) = kz + a$, donde k es una constante tal que $kL \subset M$. La constante a puede tomar el valor 0 si y sólo si F envía 0 en 0; caso en el que F será un homomorfismo de grupo. La función holomorfa F es un isomorfismo si y sólo si $kL = M$.

Demostración:

Solo queda mostrar la última afirmación. Si $kL = M$, entonces $k^{-1}M = L$ y luego $H(z) = k^{-1}(z - a)$ induce una función holomorfa de Y en X la cual es inversa de F .

□

6. Acciones de Grupo y Espacios de Cubrimiento

En esta sección se hará un estudio detallado de acciones de grupo en una superficie de Riemann cualquiera con la cual podemos inducir otra superficie de Riemann que se relacionará con la primera de una manera interesante. Esta relación nos obliga a estudiar espacios de cubrimiento y su relación con las acciones de grupo previamente vistas.

6.1. Acciones de Grupo en Superficies de Riemann

Una construcción básica de una superficie de Riemann es considerar una superficie de Riemann conocida, una acción de grupo y luego considerar el espacio topológico cociente entre la superficie original y el grupo; bajo ciertas circunstancias dicho cociente podrá ser dotado de una estructura compleja tal que la proyección natural sea holomorfa.

Sea G un grupo y X una superficie de Riemann. Asumiremos en primera instancia que G es finito.

Una *acción* de G en X es una función $G \times X \rightarrow X$, la cual denotamos por $(g, p) \mapsto g \cdot p$, la cual satisface

- $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$ para $g, h \in G$ y $p \in X$, y
- $e \cdot p = p$ para $p \in X$, donde $e \in G$ es la identidad del grupo.

Notemos que si fijamos $g \in G$, la función que envía $p \in X$ a $g \cdot p$ es una biyección de X , su inverso es la función que envía p a $g^{-1} \cdot p$.

Si U es un subconjunto de X y $g \in G$, llamaremos $g \cdot U$ al conjunto $\{g \cdot p \mid p \in U\}$.

La *órbita* de un punto $p \in X$ es el conjunto $G \cdot p = \{g \cdot p \mid g \in G\}$.

El *estabilizador* de un punto $p \in X$ es el subgrupo $G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}$. El estabilizador es también llamado el *subgrupo de isotropía* de p .

Notemos que los puntos de la misma órbita tienen estabilizadores conjugados; esto es, $G_{g \cdot p} = gG_pg^{-1}$. Además, el orden de la órbita de un punto veces el orden del estabilizador del punto es igual al orden del grupo

$$|G \cdot p| |G_p| = |G|.$$

Para mostrar lo anterior es necesario contar la cantidad de elementos en $G \cdot p$; $g_1, g_2 \in G$ son tales que $g_1 \cdot p = g_2 \cdot p$ si y sólo si $(g_2^{-1}g_1) \cdot p = p$ si y sólo si $g_2^{-1}g_1 \in G_p$. De aquí se deduce que hay tantas clases laterales de G_p como elementos en $G \cdot p$, y como G_p es subgrupo de G y su orden veces la cantidad de clases laterales de él es el orden de G , se tiene lo pedido.

El *kernel* de una acción de G en X es el subgrupo $K = \{g \in G \mid g \cdot p = p \text{ para cada } p \in X\}$. Notar que

$$K = \bigcap_{p \in X} G_p.$$

Notemos además que el kernel es un subgrupo normal de G y el grupo cociente G/K actúa en X con kernel trivial y con órbitas idénticas a la acción de G . Asumimos entonces que el kernel es siempre trivial en una acción de grupo; esta es llamada *acción efectiva*.

La acción es *continua*, respectivamente *holomorfa*, si para cada $g \in G$, la biyección que manda p a $g \cdot p$ es continua, respectivamente holomorfa, la que será necesariamente un automorfismo de X .

El *espacio cociente* X/G es el conjunto de órbitas. Existe una proyección natural entre X y X/G , $\pi : X \rightarrow X/G$, el cual envía un punto en su órbita. Proporcionamos una topología en X/G declarando por abierto a $U \subset X/G$ si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X . Claramente por definición se tiene que π es continua. Esta función será abierta en particular si es holomorfa.

Intentaremos entonces proporcionar a X/G una estructura compleja de modo que la función cociente π sea holomorfa.

Proposición 6.1.1. Sea G un grupo actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X , y fijemos un punto $p \in X$. Suponga que el subgrupo estabilizador G_p es finito. Entonces G_p es cíclico. En particular, si G es finito, todos los subgrupos estabilizadores son subgrupos cíclicos finitos.

Demostración:

Fijemos una coordenada local z centrada en p . Para cualquier $g \in G_p$, escribimos $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g)z^n$; esta serie de potencia tiene término constante igual a cero pues $g(p) = p$. Además notar que $a_1(g) \neq 0$, pues g es un automorfismo de X y tiene multiplicidad uno en cada punto, en particular p .

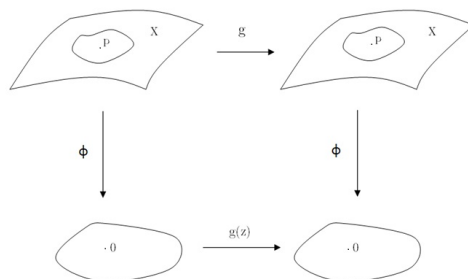


Figura 7: Diagrama de $g(z)$

Consideremos entonces la función $a_1 : G_p \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Notar que este es un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned}
 g(h(z)) &= g\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(h)z^n\right) \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m(g)\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n(h)z^n\right]^m \\
 &= a_1(g)a_1(h) + \text{términos de orden superior}
 \end{aligned}$$

entonces $a_1(gh) = a_1(g)a_1(h)$.

Sabemos por otro lado que los únicos subgrupos finitos de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ son los cíclicos (ver Algebra, T. Hungerford). Por tanto basta mostrar que a_1 es un homomorfismo *uno a uno*.

Para mostrar que a_1 es 1-1 mostraremos que el kernel de la aplicación es trivial. Consideremos entonces un elemento g en el kernel de a_1 . Esto significa que $g(z) = z + \text{términos de orden superior}$. Supongamos que existe $m \geq 2$ primer exponente no nulo de orden superior de los términos de g . Esto significa $g(z) = z + az^m \pmod{z^{m+1}}$ con $a \neq 0$.

Por inducción tenemos que $g^k(z) = z + k az^m \pmod{z^{m+1}}$. Pero como el subgrupo estabilizador es finito, existe k de modo que g^k es la identidad. Luego $g^k(z) = z$, esto fuerza a que $a = 0$ lo cual es una contradicción. Luego necesariamente el kernel es trivial y el homomorfismo es 1-1 lo que prueba la proposición. □

Proposición 6.1.2. Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X . Entonces los puntos de X con estabilizadores no triviales son discretos.

Demostración:

Supongamos que existe una secuencia $\{p_n\}$ convergiendo a p tal que cada p_i tiene un elemento no trivial g_i que lo fija. Como G es finito podemos asumir que existe un elemento que satisface la condición para cada p_i , digamos g . Como g es continuo, este debe fijar al punto límite p también. Sin embargo g es un automorfismo holomorfo de X y por Teorema de la Identidad esto significa que g es la identidad. Esta contradicción implica que los puntos con estabilizadores no triviales no pueden acumularse y en particular forman un subconjunto discreto de X . □

Como dijimos anteriormente necesitamos asignarle a la superficie cociente una estructura compleja de modo que la función natural asociada al cocientar sea holomorfa; debemos encontrar cartas complejas.

Proposición 6.1.3. Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X . Fijemos un punto $p \in X$. Entonces existe una vecindad U de p tal que:

- a. U es invariante bajo el estabilizador G_p ;
- b. $U \cap (g \cdot U) = \emptyset$ para cada $g \notin G_p$;
- c. La función natural $\alpha : U/G_p \rightarrow X/G$, inducida al enviar un punto en U en su órbita, es un homeomorfismo sobre un subconjunto abierto de X/G ;
- d. Ningún punto de U excepto p queda fijo por algún elemento de G_p .

Demostración:

Sabemos que $G - G_p$ es finito, sea $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ dicho conjunto. Como X es Hausdorff, para cada índice i podemos encontrar vecindades V_i de p y W_i de $g_i \cdot p$ de modo que $V_i \cap W_i = \emptyset$. Como para cada $g \in G$ la acción de grupo determina una aplicación continua se tiene que $g_i^{-1} \cdot W_i$ es una vecindad abierta de p para cada i . Sea $R_i = V_i \cap (g_i^{-1} \cdot W_i)$, sea $R = \bigcap_i R_i$ y sea

$$U = \bigcap_{g \in G_p} g \cdot R.$$

Es claro que cada R_i es una vecindad abierta de p y por tanto R lo es y también U . Además $g \cdot U = U$ para cada $g \in G_p$ pues por definición de U se tiene $g \cdot U \subset U$ y la acción de grupo es

una biyección al fijar g . Esto prueba la primera afirmación.

Notemos que $R_i \cap (g_i \cdot R_i) \subset V_i \cap W_i = \emptyset$; así $R \cap (g_i \cdot R) = \emptyset$ y finalmente $U \cap (g_i \cdot U) = \emptyset$ para cada i . Esto prueba la segunda afirmación.

La función $\alpha : U/G_p \rightarrow X/G$ es claramente inyectiva, pues G_p es cíclico. Sea $\beta : U \rightarrow U/G_p$ función que lleva cada punto en U a su órbita bajo el subgrupo estabilizador G_p .

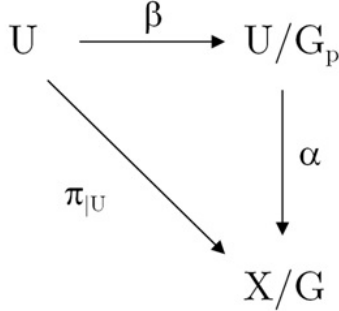


Figura 8: Diagrama de funciones

Es claro que α es continua y abierta pues junto a β nos entrega la función $\pi|_U$, la cual es continua y abierta. Así esta será homeomorfismo sobre imagen en X/G . Lo cual prueba la tercera afirmación.

Finalmente por la proposición 6.1.2. sigue que el conjunto de puntos de U que quedan fijos bajo elementos de G_p es discreto. Es decir no se pueden acumular en p por lo que U se puede restringir de modo de satisfacer la última afirmación.

□

La proposición anterior nos entrega una manera de definir cartas en X/G ; definiremos cartas en U/G_p y las transportaremos a X/G via la función α .

Escojamos un punto $\bar{p} \in X/G$, y supongamos que \bar{p} es la órbita de un punto $p \in X$. Supongamos que $|G_p| = 1$, entonces el estabilizador de p es trivial. La proposición 6.1.3. nos dice que existe una vecindad U de p tal que $\pi|_U : U \rightarrow W \subset X/G$ es un homeomorfismo sobre una vecindad W de \bar{p} . Asumimos que U es dominio de una carta $\phi : U \rightarrow V$ en X . Tomamos entonces como carta en X/G la composición $\psi = \phi \circ \pi|_U^{-1} : W \rightarrow V$. Como tanto ϕ como $\pi|_U$ son homeomorfismos, ψ es carta en X/G .

Supongamos que $|G_p| = m \geq 2$. Usando la proposición 6.1.3. escogemos una vecindad U de p que sea G_p -invariante tal que $\alpha : U/G_p \rightarrow W \subset X/G$ sea un homeomorfismo sobre alguna vecindad W de \bar{p} . Podemos asumir entonces que la función β es m a 1 desde el punto p ; esto es, cada punto en U/G_p distinto a \bar{p} tiene exactamente m preimágenes distintas en U .

Sea z una coordenada local centrada en p . Para cada $g \in G_p$ tenemos que la función $g(z)$ tiene multiplicidad uno en p . Definimos

$$h(z) = \prod_{g \in G_p} g(z).$$

Notemos que h tiene multiplicidad m en p , y está definida en alguna vecindad G_p -invariante de p . Podemos asumir que h está definida en U .

Claramente h es analítica y G_p -invariante. Así h desciende a una función continua $\bar{h} : U/G_p \rightarrow \mathbb{C}$, mas aún \bar{h} es abierta pues h lo es.

Como h es m a 1 en torno a p también lo es β . Por tanto \bar{h} es 1 a 1.

Como \bar{h} es inyectiva y abierta, entonces es homeomorfismo sobre su imagen, luego, componiendo con α^{-1} nos queda:

$$\phi : \bar{h} \circ \alpha^{-1}$$

donde $\phi : W \rightarrow \mathbb{C}$.

Debemos entonces mostrar que las cartas definidas anteriormente son compatibles y que cubren efectivamente a X/G . Observamos primero que el primer caso (de multiplicidad uno) es un caso particular del segundo, pues si $m = 1$ entonces $h(z) = z$.

Como los puntos con estabilizador no trivial forman un conjunto discreto, asumimos que no hay dos cartas cuyos dominios sea construida por el caso $m \geq 2$ y que tengan intersección no vacía. Supongamos entonces que hay dos cartas, ambas construidas por el caso $m = 1$ con intersección de dominios no nula. En este caso la compatibilidad sigue de la compatibilidad de las cartas originales en X . Supongamos entonces que tenemos una carta $\phi_1 : \bar{U}_1 \rightarrow V_1$ construida en el caso $m = 1$ y una carta $\phi_2 : \bar{U}_2 \rightarrow V_2$ construida en el caso $m \geq 2$. Sean U_1 y U_2 abiertos en X usadas en la construcción de las cartas. Escogemos un punto \bar{r} en la intersección $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2$ de los dominios de las dos cartas. Levantamos \bar{r} a $r \in U_1 \cap U_2$ (podemos asumir que U_1 y U_2 se intersectan pues podemos trasladar U_1 por la acción de grupo hasta que interseccione a U_2). Sea w una coordenada local en U_1 y z coordenada local en U_2 . La coordenada local en \bar{U}_1 es también w y la coordenada local en \bar{U}_2 es $h(z)$. Como h es analítica y como z y w son entre ellas compatibles, se tiene que ϕ_1 y ϕ_2 son compatibles.

Teorema 6.1.4. Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X . Entonces la construcción anterior de cartas en X/G hace que X/G sea una superficie de Riemann. Mas aún la función cuociente $\pi : X \rightarrow X/G$ es holomorfa de grado $|G|$ y para cada punto $p \in X$ se tiene $\text{mult}_p(\pi) = |G_p|$.

Demostración:

Las cartas construidas anteriormente definen un atlas complejo y por ende una estructura compleja en X/G . Como G es finito y X es Hausdorff entonces X/G es Hausdorff; como X es conexo y $\pi : X \rightarrow X/G$ es sobre y continua, entonces X/G es también conexo. Con lo anterior aseguramos que X/G es una superficie de Riemann.

La función π es holomorfa directamente de la definición de las cartas en X/G . Es fácil ver que el grado de π está bien definido pues el grupo es finito y su valor coincide con el orden del grupo. Finalmente la multiplicidad de un punto $p \in X$ es exactamente la multiplicidad de la función $h(z)$ construida anteriormente y esta es precisamente $|G_p|$.

□

Corolario 6.1.5. (Linearización de la acción). Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X . Fijar un punto $p \in X$ con estabilizador no trivial de orden m . Sea $g \in G_p$ generador del subgrupo estabilizador. Entonces existe una coordenada local $z \in X$ centrada en p tal que $g(z) = \lambda z$, donde λ es una raíz m -ésima de la unidad.

A continuación estudiaremos los puntos de ramificación de la función cuociente. Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann compacta X , con cuociente $Y = X/G$. Suponga que $y \in Y$ es punto rama de la función cuociente $\pi : X \rightarrow Y$. Sean x_1, x_2, \dots, x_s los puntos de X preimágenes de y ; ellos forman una órbita para la acción de

G en X . Como vimos anteriormente éstos puntos tienen subgrupos estabilizadores conjugados, en particular cada uno de esos subgrupos tienen el mismo orden, digamos r . Además el número s de puntos en la órbita es el índice del estabilizador, y es igual a $|G|/r$.

Lema 6.1.6. Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann compacta X , con función cociente $\pi : X \rightarrow Y = X/G$. Entonces para cada punto rama $y \in Y$ existe un entero $r \geq 2$ tal que $\pi^{-1}(y)$ consiste exactamente de $|G|/r$ puntos de X , además cada una de esas preimágenes bajo π tiene multiplicidad r .

Nos interesa calcular el género de la superficie cociente. Para esto usaremos la fórmula de Hurwitz.

Corolario 6.1.7. Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann compacta X , con función cociente $\pi : X \rightarrow Y = X/G$. Suponga que existen k puntos rama y_1, \dots, y_k en Y , cada preimagen de estas tiene multiplicidad r_i bajo π siendo $|G|/r_i$ la cantidad de preimágenes de y_i . Entonces

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 &= |G|(2g(X/G) - 2) + \sum_{i=1}^k \frac{|G|}{r_i} (r_i - 1) \\ &= |G|[2g(X/G) - 2 + \sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{r_i})]. \end{aligned}$$

A partir de la cantidad $\sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{r_i})$ se deduce el siguiente lema.

Lema 6.1.8. Suponga que hay k enteros dados r_1, r_2, \dots, r_k con $r_i \geq 2$ para cada i . Sea $R = \sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{r_i})$.

$$\text{a. } R < 2 \iff k, \{r_i\} = \begin{cases} k = 1, & \text{cualquier } r_1; \\ k = 2, & \text{cualquier } r_1, r_2; \\ k = 3, & \{r_i\} = \{2, 2, \text{cualquier } r_3\}; \\ k = 3, & \{r_i\} = \{2, 2, 3\}, \{2, 3, 4\} \text{ o } \{2, 3, 5\}. \end{cases}$$

$$\text{b. } R = 2 \iff k, \{r_i\} = \begin{cases} k = 3, & \{r_i\} = \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 4\} \text{ o } \{3, 3, 3\}; \\ k = 4, & \{r_i\} = \{2, 2, 2, 2\}. \end{cases}$$

$$\text{c. Si } R > 2 \text{ entonces } R \geq 2\frac{1}{42}$$

Ejemplo 6.1.9. (Acción de Grupo en la Esfera de Riemann) Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en \mathbb{C}_∞ . Como \mathbb{C}_∞ tiene género cero, lo debe tener \mathbb{C}_∞/G , y entonces por la fórmula de Hurwitz se tiene

$$-2 = |G|[-2 + R]$$

donde consideramos $R = \sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{r_i})$. En particular observamos que si $|G| \neq 1$ entonces $R \neq 0$ y luego deben haber puntos de ramificación lo que significa que $k \geq 1$. Por otro lado tenemos además que $R < 2$ pues $|G|$ debe ser positivo, y despejando $|G|$ tenemos

$$|G| = \frac{2}{2 - R}$$

Notemos también que no podemos tener $k = 1$. En efecto, esto hace que $R = 1 - 1/r$ para algún $r \geq 2$, entonces $0 < R < 1$ y $2 > 2 - R > 1$; así $|G|$ no sería un entero.

Para el caso $k = 2$ supongamos que los dos puntos rama son y_1 y y_2 . Considerar un pequeño camino cerrado γ en \mathbb{C}_∞/G en torno a y_1 , el cual parte y termina en algún punto y_0 . Este camino puede levantarse a una curva en \mathbb{C}_∞ el cual parte en cualquiera de los $|G|$ puntos preimágenes de y_0 y termina también en otro punto preimagen. La permutación entre puntos iniciales y finales del levantamiento tiene orden r_1 . Idénticamente formamos un pequeño camino cerrado en torno a y_2 dando una permutación de orden r_2 . Sin embargo $\mathbb{C}_\infty/G \cong \mathbb{C}_\infty$ y luego los dos caminos cerrados son homotópicos. Así las permutaciones deben tener el mismo orden, digamos r . Notemos que en este caso $|G| = r$.

En el caso $k = 3$ tenemos cuatro posibilidades

$$\text{si } \{r_i\} = 2, 2, r, \text{ entonces } |G| = 2r,$$

$$\text{si } \{r_i\} = 2, 3, 3, \text{ entonces } |G| = 12,$$

$$\text{si } \{r_i\} = 2, 3, 4, \text{ entonces } |G| = 24,$$

$$\text{si } \{r_i\} = 2, 3, 5, \text{ entonces } |G| = 60,$$

El primer caso se cumple bajo la acción de un grupo diedral. Los demas bajo acción de A_4, S_4, A_5 . Conocidas como “Acciones de Sólidos Platónicos”, los cuales son grupos actuando en la esfera dejando invariante un tetraedro en el caso 2, 3, 3, un cubo y un octahedro en el caso 2, 3, 4 o un dodecahedro y un icosaedro en el caso 2, 3, 5.

Finalmente dejaremos enunciado un teorema de Hurwitz el cuál relaciona mediante una desigualdad al orden de una acción de grupo (el cual debe ser finito) y el género de una superficie de Riemann compacta.

Teorema 6.1.10. Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann compacta X de género $g \geq 2$. Entonces

$$|G| \leq 84(g - 1)$$

Hasta ahora hemos considerado acciones de grupo en superficies de Riemann donde los grupos son finitos. ¿Qué condiciones debe satisfacer una acción de grupo de modo que, siendo el grupo de orden infinito, se puedan definir cartas complejas compatibles en el espacio cociente?. Si observamos bien las demostraciones de las proposiciones de esta sección, nos damos cuenta que las propiedades más fuertes que usamos para construir las cartas complejas son que para cada punto de la superficie de Riemann, el subgrupo estabilizador de ese punto debe ser finito y aquellas que aparecen en la proposición 6.1.3. Buscamos entonces propiedades sobre una acción de grupo en una superficie de Riemann de modo que cada subgrupo estabilizador sea finito y que además las propiedades de la proposición 6.1.3. se cumplan.

Definición 6.1.11. Sea X una superficie de Riemann y $G \times X \rightarrow X$ una acción de grupo en X . Diremos que G actúa propiamente discontinuo en X si para cada $p \in X$, existe U vecindad abierta de p tal que

- $\{g \in G \mid (g \cdot U) \cap U \neq \emptyset\}$ es finito, y

- $\forall g \in G$ tal que $g \cdot p \neq p$, entonces $(g \cdot U) \cap U = \emptyset$.

El hecho de que una acción actúe de manera propiamente discontinua implica que podemos construir cartas complejas en la superficie de la misma manera que lo hicimos en el caso de un grupo finito. Vemos que, en particular, el estabilizador de todo punto será finito en este caso.

Ejemplo 6.1.12. Sea $f_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por $f_1(z) = z + 1$ y $f_2(z) = z + i$. Sea $G = \langle f_1, f_2 \rangle$ un grupo libre de dos generadores, los cuales son automorfismos del plano complejo. Definimos la acción de grupo $G \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g \times z \mapsto g(z)$ con $g \in G$. Así definida, $G \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y \mathbb{C}/G es un toro complejo.

6.2. Espacios de Cubrimiento y el Grupo Fundamental

En esta sección relacionaremos principalmente al *espacio cubrimiento universal* de una variedad conexa V con su grupo fundamental. Usaremos parte de la teoría desarrollada en la sección anterior para resolver algunas interrogantes.

Recuerdo 6.2.1. (Grupo Fundamental) Sea V una variedad real conexa y fijemos un punto base $q \in V$. Un camino en V es una función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$. Una curva cerrada con base en q es un camino en V tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = q$. Dos curvas cerradas γ_1 y γ_2 se dicen *homotópicas* si existe una función continua $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow V$ tal que $G(0, t) = \gamma_1(t)$ y $G(1, t) = \gamma_2(t)$ para todo t , y $G(s, 0) = G(s, 1) = q$ para cada s . Esta homotopía define una relación de equivalencia entre curvas cerradas con base en q . El *grupo fundamental* de V en q es el conjunto de clases homotópicas de curvas cerradas con base en q , y se denota $\pi_1(V, q)$. Un espacio conexo se dice *simplemente conexo* si su grupo fundamental es el trivial.

Definición 6.2.2. Sean X, Y espacios topológicos. Sea $f : X \rightarrow Y$ función continua. Diremos que f es un *homeomorfismo local* si para cada punto $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x de modo que $f(U)$ es abierto en Y , con $f|_U : U \rightarrow f(U)$ un homeomorfismo.

Proposición 6.2.3. Sea X una superficie de Riemann, Y un espacio topológico *Hausdorff* y conexo, y sea $f : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local. Entonces existe una única estructura compleja en Y tal que f es holomorfa.

Demostración:

Suponga que $\phi_1 : U_1 \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ es una carta compleja de la estructura compleja de X tal que existe un subconjunto abierto $U \subset Y$ con $f|_U : U \rightarrow U_1$ homeomorfismo. Entonces $\phi := \phi_1 \circ f : U \rightarrow V$ es una carta compleja en Y . Sea \mathcal{A} el conjunto de todas las cartas complejas en Y obtenidas de esta manera. Naturalmente los dominios de las cartas cubren Y . Sea $\phi : U_1 \rightarrow V_1$ y $\psi : U_2 \rightarrow V_2$ cartas de \mathcal{A} . De esta forma la función transición queda definida

por

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U_1 \cap U_2) \rightarrow \psi(U_1 \cap U_2)$$

de donde

$$\psi \circ \phi^{-1} = (\psi^* \circ f) \circ (\phi^* \circ f)^{-1} = (\psi^* \circ f) \circ (f^{-1} \circ \phi^{*-1}) = \psi^* \circ \phi^{*-1}$$

con $\phi^* : U_1^* \rightarrow V_1$ y $\psi^* : U_2^* \rightarrow V_2$ cartas complejas en X . De esta forma $\psi \circ \phi^{-1}$ es analítica y las cartas de \mathcal{A} son compatibles entre si.

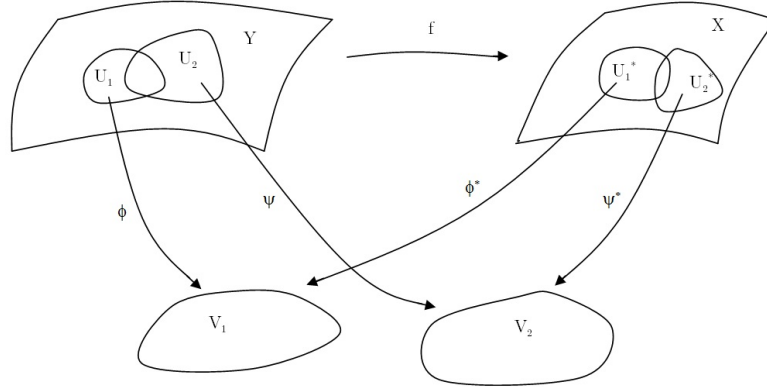


Figura 9: Diagrama de compatibilidad de cartas complejas

El atlas complejo \mathcal{A} induce en Y una estructura compleja, llamemosla \mathcal{E} . Supongamos que \mathcal{E}' es otra estructura compleja en Y de modo que $f : (Y, \mathcal{E}') \rightarrow X$ es holomorfa. Recordemos que debido al homeomorfismo local, ambas funciones f (definidas en Y con las estructuras \mathcal{E} y \mathcal{E}') son localmente biholomorfas. Por tanto la función identidad $I : (Y, \mathcal{E}) \rightarrow (Y, \mathcal{E}')$ es biholomorfismo local y por lo tanto I es biholomorfa, es decir \mathcal{E} y \mathcal{E}' es la misma estructura compleja.

□

Definición 6.2.4.(Funciones de Levantamiento) Suponga que X, Y y Z son espacios topológicos y $p : Y \rightarrow X, f : Z \rightarrow X$ funciones continuas. Entonces un levantamiento de f respecto a p es una función continua $g : Z \rightarrow Y$ tal que $f = p \circ g$.

Teorema 6.2.5.(Unicidad de Levantamientos) Suponga que X e Y son espacios Hausdorff y $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local. Suponga que Z es un espacio topológico conexo y $f : Z \rightarrow X$ función continua. Si $g_1, g_2 : Z \rightarrow Y$ son dos levantamientos de f respecto a p de modo que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ para algún $z_0 \in Z$, entonces $g_1 = g_2$.

Demostración:

Sea $T := \{z \in Z | g_1(z) = g_2(z)\}$. T es cerrado pues este es preimagen de la diagonal $\Delta \subset Y \times Y$ bajo la función $(g_1, g_2) : Z \rightarrow Y \times Y$.

Sea $z \in T$ y sea $y = g_1(z) = g_2(z)$. Como p es homeomorfismo local, existe vecindad V de y la cual es mapeada por p homeomorficamente sobre una vecindad U de $p(y) = f(z)$. Como g_1 y g_2 son ambas continuas, existe vecindad W de z con $g_i(W) \subset V$. Sea $\phi : U \rightarrow V$ la función

inversa de $p|_V : V \rightarrow U$. ϕ es continua, y como $p \circ g_i = f$, se tiene $g_i|_W = \phi \circ (f|_W)$ para $i = 1, 2$. Así $g_1|_W = g_2|_W$ y $W \subset T$. Por tanto T es abierto y como Z es conexo y T no vacío, $T = Z$ y luego $g_1 = g_2$. □

Teorema 6.2.6. Sean X, Y y Z superficies de Riemann, $p : Y \rightarrow X$ función holomorfa sin ramas y $f : Z \rightarrow X$ holomorfa. Entonces todo levantamiento $g : Z \rightarrow Y$ de f es holomorfo.

Demostración:

Suponga $c \in Z$ punto arbitrario y sea $b := g(c)$, $a := p(b) = f(c)$. Entonces existen vecindades abiertas V de b y U de a tal que $p|_V : V \rightarrow U$ es biholomorfismo. Suponga que $\phi : U \rightarrow V$ es su inverso. Como g es continua, existe una vecindad abierta W de c tal que $g(W) \subset V$. Pero $f = p \circ g$ implica que $g|_W = \phi \circ (f|_W)$ y por tanto g es holomorfa en c . Luego por la arbitrariedad de c se tiene lo pedido. □

Suponga ahora que X e Y son espacios topológicos Hausdorff y $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local. Nos interesa en particular el levantamiento de caminos de la forma $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. Por teorema 6.2.5. se tiene que si existe levantamiento $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow Y$, está únicamente determinado una vez que el levantamiento del punto inicial de γ está especificado. De ahora en adelante $I := [0, 1]$.

Teorema 6.2.7. (Levantamiento de Curvas) Sean X e Y espacios topológicos Hausdorff y $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local. Suponga que $a, b \in X$ y $\tilde{a} \in Y$ es un punto tal que $p(\tilde{a}) = a$. Suponga además que una función continua $A : I \times I \rightarrow X$ está dada tal que $A(0, s) = a$ y $A(1, s) = b$ para cada $s \in I$. Se define $\gamma_s(t) := A(t, s)$. Si toda curva γ_s puede levantarse a una curva $\tilde{\gamma}_s$ con punto inicial \tilde{a} , entonces $\tilde{\gamma}_0$ y $\tilde{\gamma}_1$ tienen el mismo punto final y son homotópicas.

Demostración:

Se define la función $\tilde{A} : I \times I \rightarrow Y$ por $\tilde{A}(t, s) = \tilde{\gamma}_s(t)$.

Aseguramos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que \tilde{A} es continua en $[0, \varepsilon_0] \times I$. En efecto, existen vecindades abiertas V de \tilde{a} y U de a tales que $p|_V : V \rightarrow U$ es homeomorfismo. Sea $\phi : U \rightarrow V$ su función inversa. Como $A(0 \times I) = \{a\}$ y A es continua, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $A([0, \varepsilon_0] \times I) \subset U$. Por la unicidad del levantamiento de curvas uno tiene que $\tilde{\gamma}_s|_{[0, \varepsilon_0]} = \phi \circ \gamma_s|_{[0, \varepsilon_0]}$ para cada $s \in I$. Así $\tilde{A} = \phi \circ A$ en $[0, \varepsilon_0] \times I$. Luego \tilde{A} es continua en $[0, \varepsilon_0] \times I$.

Aseguramos también que \tilde{A} es continua en todo $I \times I$. En efecto, suponga que existe un punto $(t_0, \sigma) \in I \times I$ tal que \tilde{A} no es continua. Sea τ el ínfimo de todos los t tales que \tilde{A} no es continua en (t, σ) . Es claro por el resultado anterior que $\tau \geq \varepsilon_0$. Se define $x = A(\tau, \sigma)$ e $y = \tilde{A}(\tau, \sigma)$. Existen vecindades abiertas V de y y U de x tales que $p|_V : V \rightarrow U$ es homeomorfismo. Sea $\phi : U \rightarrow V$ su inverso. Como A es continua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $A(I_\varepsilon(\tau) \times I_\varepsilon(\sigma)) \subset U$, donde

$$I_\varepsilon(\xi) = \{t \in I \mid |t - \xi| < \varepsilon\}$$

En particular $\gamma_\sigma(I_\varepsilon(\tau)) \subset U$ y así

$$\tilde{\gamma}_\sigma|_{I_\varepsilon(\tau)} = \phi \circ \gamma_\sigma|_{I_\varepsilon(\tau)}$$

Escoger $t_1 \in I_\varepsilon(\tau)$ con $t_1 < \tau$. Entonces

$$\tilde{A}(t_1, \sigma) = \tilde{\gamma}_\sigma(t_1) \in V$$

y como \tilde{A} es continua en (t_1, σ) , existe $\delta > 0$, $\delta \leq \varepsilon$ tal que

$$\tilde{A}(t_1, s) = \tilde{\gamma}_s(t_1) \in V \text{ para cada } s \in I_\delta(\sigma)$$

Por la unicidad de levantamientos sigue que $\forall s \in I_\delta(\sigma)$

$$\tilde{\gamma}_s|_{I_\varepsilon(\tau)} = \phi \circ \gamma_s|_{I_\varepsilon(\tau)}$$

Así $\tilde{A} = \phi \circ A$ en $I_\varepsilon(\tau) \times I_\delta(\sigma)$ lo que contradice la discontinuidad de \tilde{A} en (τ, σ) . Por tanto \tilde{A} es continua en $I \times I$.

Como $A = p \circ \tilde{A}$ y $A(\{1\} \times I) = \{b\}$ se tiene $\tilde{A}(\{1\} \times I) \subset p^{-1}(b)$. Pero $p^{-1}(b)$ es discreto y $\{1\} \times I$ es conexo. Así $\tilde{A}(\{1\} \times I)$ consiste de un solo punto por tanto $\tilde{\gamma}_0$ y $\tilde{\gamma}_1$ tienen el mismo punto final e inicial y como \tilde{A} es continua en $I \times I$ se tiene la homotopía.

□

La demostración anterior nos permite tener una idea clara de la siguiente definición.

Definición 6.2.8. (Propiedad de Levantamiento de camino) Sean X, Y espacios topológicos Hausdorff. Una función continua $f : Y \rightarrow X$ se dice que tiene la *Propiedad de Levantamiento de camino* si para cada curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ y cada punto $y_0 \in Y$ tal que $f(y_0) = \gamma(0)$ existe un levantamiento $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow Y$ de γ tal que $\tilde{\gamma}(0) = y_0$.

El siguiente paso es estudiar un tipo particular de funciones, las cuales nos entregaran herramientas que permitan facilitar el estudio de las superficies de Riemann.

Definición 6.2.9. (Espacio de Cubrimiento) Sean U, V espacios topológicos. Un *espacio de cubrimiento* de V es una función continua $F : U \rightarrow V$ la cual es sobre, y para cada punto $v \in V$ existe una vecindad W de v en V tal que $F^{-1}(W)$ consiste de unión disjunta de conjuntos abiertos U_α , cada uno de ellos homeomorfo a W vía F restringida al dominio adecuado. Notar que bajo esta definición F es un homeomorfismo local.

Teorema 6.2.10. Sean X, Y espacios topológicos Hausdorff. Todo cubrimiento $F : Y \rightarrow X$ tiene la Propiedad de Levantamiento de camino.

Demostración:

Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un camino, $y_0 \in Y$ con $F(y_0) = \gamma(0)$. Por compacidad de $[0, 1]$ existe partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ y abiertos $U_k \subset X$, con $k = 1, \dots, n$ tal que

- a. $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$
- b. $F^{-1}(U_k) = \bigcup_{j \in J_k} V_{kj}$ donde $V_{kj} \subset Y$ son abiertos tales que $F|_{V_{kj}} : V_{kj} \rightarrow U_k$ son homeomorfismos.

Usaremos ahora el principio de inducción matemática sobre la variable k . Probaremos la existencia de un levantamiento $\tilde{\gamma}|_{[0,t_k]} : [0, t_k] \rightarrow X$ con $\tilde{\gamma}(0) = y_0$. Para $k = 0$ la afirmación es trivial. Supongamos que $k \geq 1$ y $\tilde{\gamma}|_{[0,t_{k-1}]} : [0, t_{k-1}] \rightarrow X$ ya está construida, sea $\tilde{\gamma}(t_{k-1}) = y_{k-1}$. Como $F(y_{k-1}) = \gamma(t_{k-1}) \in U_k$, existe $j \in J_k$ tal que $y_{k-1} \in V_{kj}$. Sea $\phi : U_k \rightarrow V_{kj}$ la función inversa a $F|_{V_{kj}} : V_{kj} \rightarrow U_k$, entonces $\tilde{\gamma}|_{[t_{k-1}, t_k]} := \phi \circ (\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]})$. Así se extiende continuamente el levantamiento $\tilde{\gamma}$ al intervalo $[0, t_k]$.

□

Probamos entonces que todo cubrimiento $F : V \rightarrow U$ satisface la propiedad de Levantamiento de Camino. En otras palabras uno puede levantar γ en U de modo que el punto de partida del camino en U sea cualquier preimagen del punto de partida de γ .

Definición 6.2.11. Diremos que dos cubrimientos $F_1 : U_1 \rightarrow V$ y $F_2 : U_2 \rightarrow V$ de una variedad real V son isomorfos si existe un homeomorfismo $G : U_1 \rightarrow U_2$ de modo que $F_2 \circ G = F_1$.

Si V es una variedad real conexa siempre existe un espacio de cubrimiento universal $F_0 : U_0 \rightarrow V$ tal que U_0 es simplemente conexo; además dicho cubrimiento universal es único salvo isomorfismos. La propiedad universal del cubrimiento universal proviene del hecho que si $F : U \rightarrow V$ es otro espacio de cubrimiento conexo de V , entonces existe un único cubrimiento $G : U_0 \rightarrow U$ tal que $F_0 = F \circ G$ (Ver Algebraic Topology: An introduction, W.S. Massey).

Sea entonces V una variedad real conexa, aseguramos la existencia de su espacio de cubrimiento universal $F_0 : U_0 \rightarrow V$. Fijemos un punto $p \in U_0$ el cual cae vía F_0 en $q \in V$. Escogamos una curva cerrada γ en V con base en q y un punto $u \in U_0$. Escogemos un camino α en U_0 el cual parte en u y termina en p . Así $F_0 \circ \alpha$ es un camino en V el cual parte en $F_0(u)$ y termina en q . Su reverso $-\alpha \circ F_0$, parte en q y termina en $F_0(u)$. Considere el único levantamiento $\tilde{\gamma}$ del camino cerrado γ que parte en p , y el único levantamiento β del camino $-\alpha \circ F_0$ el cual parte en $\tilde{\gamma}(1)$. Notar que $\beta(1)$ cae vía F_0 en $F_0(u)$. Ver Figura 10.

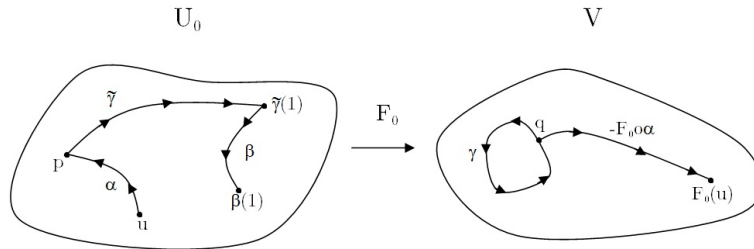


Figura 10: Grupo Fundamental y Cubrimiento Universal

Es posible verificar que el punto $\beta(1)$ depende de u y de la clase homotópica $[\gamma]$. Así llamaremos $\beta(1) = [\gamma] \cdot u$, la cual entrega una acción de grupo, la acción de $\pi_1(V, q)$ en el cubrimiento universal $F_0 : U_0 \rightarrow V$. Debido a que el único elemento de $\pi_1(V, q)$ que fija a cada punto es la identidad, se concluye que la acción es propiamente discontinua sobre U_0 .

Consideremos ahora $U_0/\pi_1(V, q)$. Este es el espacio de las órbitas de los puntos de U_0 bajo la acción de grupo, por tanto, es fácil ver que los puntos que pertenecen a la órbita de p son el conjunto de las preimágenes de q vía F_0 , luego naturalmente se demuestra que $U_0/\pi_1(V, q)$ es homeomorfo al espacio original V .

Por otro lado, dado cualquier subgrupo $H \subset \pi_1(V, q)$ del grupo fundamental, la acción puede restringirse a una acción de H en el cubrimiento universal. El espacio de las órbitas U_0/H se mapea a V y es un espacio de cubrimiento de V . Además todo espacio de cubrimiento conexo de V satisface lo siguiente; dos espacios de órbita son isomorfos si y sólo si los subgrupos son subgrupos conjugados del grupo fundamental. Esto entrega una correspondencia 1 – 1 entre las clases de isomorfismos de cubrimientos conexos $F : U \rightarrow V$ con las clases de conjugación de subgrupos $H \subset \pi_1(V, q)$ del grupo fundamental.

Por último debemos mostrar que dada una superficie de Riemann X con espacio de cubrimiento universal U_0 se satisface que $U_0/\pi_1(X)$ es isomorfo a X . Vimos que topológicamente son equivalentes vía una función $G : U_0/\pi_1(X) \rightarrow X$, por tanto basta mostrar que G es holomorfa y su inversa también. En efecto, sea U el dominio de una carta compleja $\phi : U \rightarrow U'$, en $U_0/\pi_1(X)$, en un punto u de $U_0/\pi_1(X)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un abierto V de U_0 , dominio de una carta compleja $\psi : V \rightarrow V'$ en U_0 , que es homeomorfo a U vía la proyección natural del cuociente π . Así mismo, podemos suponer que V es homeomorfo a W , donde W es un abierto de X , con W el dominio de una carta compleja $\eta : W \rightarrow W'$ en X ; de esta forma $G|_U = F_0|_V \circ \pi|_V^{-1} : U \rightarrow W$ es homeomorfismo. Por otro lado sabemos que $\psi \circ \pi|_V^{-1} \circ \phi^{-1} : U' \rightarrow V'$ y $\eta \circ F_0|_V \circ \psi^{-1} : V' \rightarrow W'$ son analíticas, luego su composición $\eta \circ F_0|_V \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \pi|_V^{-1} \circ \phi^{-1} = \eta \circ F_0|_V \circ \pi|_V^{-1} \circ \phi^{-1} = \eta \circ G \circ \phi^{-1} : U' \rightarrow W'$ es analítica (Ver Figura 11). Por la arbitrariedad de las cartas complejas en un punto cualquiera de X , se concluye que $U_0/\pi_1(X)$ y X son isomorfos.

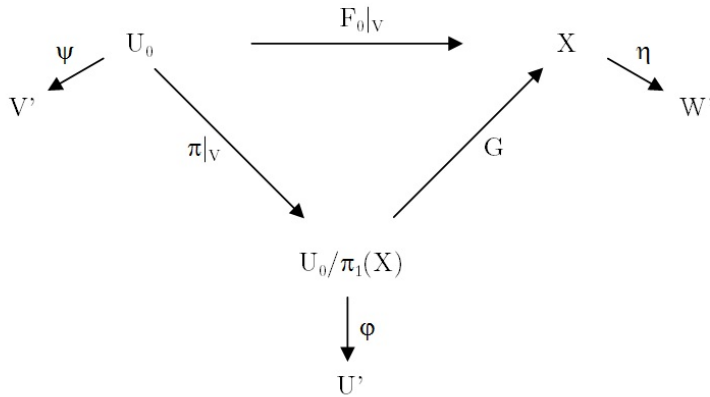


Figura 11: Isomorfismo de $U_0/\pi_1(X)$ con X

6.3. Una Mirada al Teorema de Uniformización

Uno de los resultados más interesantes en cuanto a superficies de Riemann es el *Teorema de Uniformización*, el cual básicamente nos permite caracterizar a las superficies de Riemann. Sabemos que el *Plano Complejo*, *Disco Unitario* y la *Esfera de Riemann* son superficies de Riemann simplemente conexas. De acuerdo a lo estudiado en la sección anterior, el cubrimiento universal de cualquier superficie de Riemann es necesariamente una superficie de Riemann simplemente conexa dotada con la estructura compleja descrita en la proposición 6.2.3.

El teorema nos dice que dicho cubrimiento es necesariamente isomorfo a uno de los tres mencionados (Ver Riemann Surfaces, H.M. Farkas y I. Kra)

Teorema 6.3.1. (Teorema de Uniformización para superficies simplemente conexas) Sea X una superficie de Riemann simplemente conexa. Entonces X es isomorfo a una y sólo una de las siguientes superficies de Riemann.

1. \mathbb{C}_∞
2. \mathbb{C}
3. \mathbb{D}

Podemos mostrar que las superficies de Riemann mencionadas son no isomorfas entre sí, en efecto, si dos superficies de Riemann son isomorfas, entonces topológicamente hablando deben ser homeomorfas. Por tanto la esfera no puede ser topológicamente equivalente a ninguna de las dos restantes por compacidad. Supongamos entonces que existe un isomorfismo (no constante) entre el plano complejo \mathbb{C} y el disco unitario \mathbb{D} , de ser así dicha función es en particular holomorfa, acotada y entera, luego constante por teorema de Liouville, lo cual es una contradicción.

□

Ejemplo 6.3.2. La única superficie de Riemann M la cual tiene como cubrimiento universal la esfera, es la esfera misma. En efecto, si M no es una esfera entonces $\pi_1(M) \neq \{1\}$. En las secciones anteriores vimos que podemos definir una acción de grupo de la forma

$$\mathbb{C}_\infty \times \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{C}_\infty$$

Consideremos un elemento $g \in \pi_1(M)$ tal que $g \neq 1$. Luego la función $\mathbb{C}_\infty \times g \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es un automorfismo de la esfera en la esfera, por tanto debe tener punto fijo, digamos $p \in \mathbb{C}_\infty$.

Por otro lado, si $F : \mathbb{C}_\infty \rightarrow M$ es la función de cubrimiento, entonces $|\pi_1(M)|$ es finito pues \mathbb{C}_∞ es compacta. Por tanto $\text{mult}_p(F) = |\pi_1(M)_p| \neq 1$ y luego en p no habría un homeomorfismo local, lo que contradice nuestra hipótesis de que F es función de cubrimiento.

Ejemplo 6.3.3. El espacio de cubrimiento universal de un toro complejo es el plano complejo. En efecto, el toro complejo se define como el plano complejo cuocientado con un reticulado. Sea $T = \mathbb{C}/L$ donde $L = \mathbb{Z}z_1 + \mathbb{Z}z_2$ con z_1 y z_2 números complejos linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Se define entonces $F := \mathbb{C} \rightarrow T$ por $F(z) = [z]$, F es sobre. Vimos en la construcción del toro

complejo que dicha función es holomorfa pues la función de transición representa traslaciones en el plano. Por otro lado vimos que para cada punto del toro, existe una vecindad tal que su preimagen vía F es exactamente unión disjunta de abiertos en \mathbb{C} tal que F restringida a cada una de esas vecindades es un homeomorfismo, es decir, F es la función de cubrimiento. Ver Figura 12.

Ejemplo 6.3.4. Sea X una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$. El teorema de clasificación de superficies compactas nos dice que una superficie compacta de género $g \geq 2$ proviene de la identificación de los lados un polígono de $4g$ lados (con los lados curvas geodésicas). En esta identificación los vértices son un punto en el espacio cociente. Por el teorema de uniformización se debe tener que X es cociente de U_0 con $\pi(X)$, para U_0 alguna de las superficies de Riemann simplemente conexas, es decir, el polígono que vía la identificación de lados determina X debe estar en U_0 y la suma de los ángulos interiores de dicho polígono debe ser 2π pues la función de cubrimiento universal es holomorfa. Como un polígono de $4g$ lados en el plano complejo satisface que la suma de sus ángulos interiores es mayor a 2π y por el ejemplo 6.3.2. se tiene que U_0 debe ser el disco unitario.

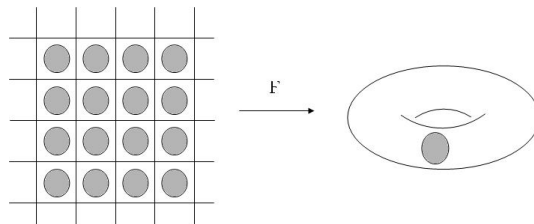


Figura 12: Función de Cubrimiento del Toro Complejo

Por último queda enunciado el teorema de Uniformización en su versión más general. Si asumimos el teorema 6.3.1. el resto se concluye de lo estudiado en las secciones 5 y 6.

Teorema 6.3.5. (Teorema de Uniformización) Sea X una superficie de Riemann. Entonces X es isomorfo a U/G donde, o bien $U = \mathbb{C}_\infty$, o bien $U = \mathbb{C}$, o bien $U = \mathbb{D}$, con G un subgrupo de automorfismos de U isomorfo a $\pi_1(X)$.

7. Integración en Superficies de Riemann

En esta sección daremos las definiciones básicas para integrar sobre superficies de Riemann. La idea general es basarse en la integración en el plano complejo usando las cartas complejas de la superficie.

7.1. 1-Formas Analíticas, 1-formas C^∞ y 2-Formas C^∞

Definición 7.1.1. Una *1-Forma analítica* en un conjunto abierto $V \subset \mathbb{C}$ es una expresión ω de la forma

$$\omega = f(z)dz$$

donde f es una función holomorfa en V . Decimos que ω es una 1-forma analítica *en la coordenada z* .

Definición 7.1.2. Suponga que $\omega_1 = f(z)dz$ es una 1-forma analítica en la coordenada z , definida en un conjunto abierto V_1 . Suponga también que $\omega_2 = g(w)dw$ es una 1-forma analítica en la coordenada w , definida en un conjunto abierto V_2 . Sea $z = T(w)$ una función holomorfa que mapea V_2 en V_1 . Decimos que ω_1 *transforma a ω_2 bajo T* si

$$g(w) = f(T(w))T'(w).$$

Notar que si T tiene inversa S , entonces ω_1 *transforma a ω_2 bajo T* si y sólo si ω_2 *transforma a ω_1 bajo S* .

Definición 7.1.3. Sea X una superficie de Riemann. Una 1-forma analítica en X es una colección de 1-formas analíticas $\{\omega_\phi\}$, una para cada carta $\phi : U \rightarrow V$ en la coordenada del recorrido V , tales que si dos cartas $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$, con $i = 1, 2$, tienen dominios con intersección no vacía, entonces la 1-forma asociada ω_{ϕ_1} transforma a ω_{ϕ_2} bajo la función transición $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$.

Lema 7.1.4. Sea X una superficie de Riemann y \mathcal{A} un atlas complejo en X . Suponga que hay 1-formas analíticas dadas para cada carta de \mathcal{A} , las cuales transforman una a otra en cada uno de sus dominios en común bajo las funciones de transición correspondientes. Entonces existe una única 1-forma analítica en X que extiende a toda la estructura compleja las 1-formas analíticas de cada una de las cartas de \mathcal{A} .

Demostración:

Sea ψ una carta en X que no sea del atlas. Fijemos un punto p en el dominio de ψ , y escojamos una carta ϕ del atlas que contenga al punto p en su dominio; sea z la variable local asociada. Sea $f(z)dz$ la 1-forma analítica con respecto a ϕ . Entonces definimos la 1-forma analítica con respecto a ψ como $f(T(w))T'(w)dw$, donde $z = T(w)$ y $T = \phi \circ \psi^{-1}$.

Debemos probar que la 1-forma está bien definida.

Sea φ una carta de \mathcal{A} que contiene a p y sea $g(x)dx$ su 1-forma analítica asociada. Sea S la función de transición $\varphi \circ \psi^{-1}$, $x = S(w)$. Debemos probar que

$$f(T(w))T'(w) = g(S(w))S'(w).$$

Como las 1-formas de φ y ϕ transforman una en la otra, se tiene la siguiente igualdad

$$f(z) = g(R(z))R'(z)$$

con $R = \varphi \circ \phi^{-1}$ y $x = R(z)$. Luego, por simple regla de la cadena tenemos

$$f(T(w)) = g(S(w))S'(w)(T^{-1}(z))'$$

pero $(T^{-1}(z))' = (T'(w))^{-1}$ por lo que

$$f(T(w))T'(w) = g(S(w))S'(w)$$

y por tanto aseguramos que la 1-forma asociada a ψ está bien definida.

El conjunto de todas las 1-formas definidas de esta manera forman la 1-forma analítica en X , esto es claro por que se hereda de la compatibilidad de las 1-formas del atlas.

Finalmente la unicidad se deduce pues la estructura es únicamente maximal en cuanto a compatibilidad.

□

Podemos análogamente definir 1-formas meromorfas en superficies de Riemann. Empezaremos al igual que en las 1-formas analíticas, definiendo 1-formas meromorfas en dominios del plano complejo.

Definición 7.1.5. Una *1-forma meromorfa* en un conjunto abierto $V \subset \mathbb{C}$ es una expresión ω de la forma

$$\omega = f(z)dz$$

donde f es una función meromorfa en V . Decimos que ω es una 1-forma meromorfa en la coordenada z .

Idénticamente, necesitamos una noción de compatibilidad entre dos 1-formas meromorfas.

Definición 7.1.6. Suponga que $\omega_1 = f(z)dz$ es una 1-forma meromorfa en la coordenada z , definida en un conjunto abierto V_1 . Supongamos además que $\omega_2 = g(w)dw$ es una 1-forma meromorfa en la coordenada w , definida en un conjunto abierto V_2 . Sea $z = T(w)$ definiendo una función analítica entre V_2 y V_1 . Decimos que ω_1 *transforma a ω_2 bajo T* si $g(w) = f(T(w))T'(w)$.

Por tanto, bajo esta definición podemos definir 1-formas meromorfas en superficies de Riemann como sigue

Definición 7.1.7. Sea X una superficie de Riemann. Una *1-forma meromorfa* en X es una colección de 1-formas meromorfas $\{\omega_\phi\}$, una para cada carta compleja $\phi : U \rightarrow V$ en la variable del conjunto V , tal que para dos cartas $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$, para $i = 1, 2$, con $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, la 1-forma

asociada ω_{ϕ_1} transforma a ω_{ϕ_2} bajo el cambio de coordenadas $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$.

Análogo al caso de 1-forma analítica, en una superficie de Riemann basta considerar las 1-formas asociadas a las cartas de algún atlas complejo.

Relajando un poco la condición de ser analítica, uno puede definir 1-formas C^∞ . Estas pueden ser expresadas localmente como funciones de la forma

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

donde x e y son las variables reales asociadas.

Usando la notación compleja obtenemos que en términos de variables complejas la 1-forma puede ser expresada por

$$r(z, \bar{z})dz + s(z, \bar{z})d\bar{z}$$

donde $dz = dx + idy$ y $d\bar{z} = dx - idy$.

Así mismo, dada una función C^∞ podemos definir las derivadas parciales respecto a las coordenadas complejas.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

Con esta notación una función C^∞ será analítica en V si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ la cual es la condición de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para f .

Definición 7.1.8. Una 1-forma C^∞ en un abierto $V \subset \mathbb{C}$ es una expresión ω de la forma

$$\omega = f(z, \bar{z})dz + g(z, \bar{z})d\bar{z}$$

donde f y g son funciones C^∞ en V . Decimos que ω es una 1-forma C^∞ en la coordenada z .

Definición 7.1.9. Suponga que $\omega_1 = f_1(z, \bar{z})dz + g_1(z, \bar{z})d\bar{z}$ es una 1-forma C^∞ en la coordenada z definida en un abierto V_1 . Suponga además que $\omega_2 = f_2(w, \bar{w})dw + g_2(w, \bar{w})d\bar{w}$ es una 1-forma C^∞ en la coordenada w definida en un abierto V_2 . Sea $z = T(w)$ el cual define una función analítica de V_2 a V_1 . Decimos que ω_1 transforma a ω_2 bajo T si $f_2(w, \bar{w}) = f_1(T(w), \bar{T}(w))T'(w)$ y $g_2(w, \bar{w}) = g_1(T(w), \bar{T}(w))\bar{T}'(w)$.

Análogamente a la definición de 1-formas analíticas en una superficie de Riemann, podemos definir las 1-formas C^∞ en una superficie de Riemann.

Definición 7.1.10. Sea X una superficie de Riemann. Una 1-forma C^∞ en X es una colección $\{\omega_\phi\}$ de 1-formas C^∞ , una para cada carta $\phi : U \rightarrow V$ en la variable del recorrido V , tal que si dos cartas $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ (para $i = 1, 2$) tienen intersección de dominios no vacía, entonces la 1-forma asociada ω_{ϕ_1} transforma a ω_{ϕ_2} bajo la función de transición $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$.

Al igual que en las 1-formas analíticas, basta tener definidas las 1-formas C^∞ en las cartas de algún atlas complejo de la superficie.

Definición 7.1.11 Una 2-forma C^∞ en un abierto $V \subset \mathbb{C}$ es una expresión η de la forma

$$\eta = f(z, \bar{z})dz \wedge d\bar{z}$$

donde f es una función C^∞ en V . Decimos que η es una 2-forma C^∞ en la coordenada z .

Este tipo de diferenciales para la integración de superficies se comportan como sigue. De partida

$$dz \wedge d\bar{z} = -d\bar{z} \wedge dz$$

como un cambio de orden en el producto *exterior* que corresponde al cambio de orientación de la superficie bajo la integración. Además

$$dz \wedge dz = 0$$

$$d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0$$

Definición 7.1.12. Suponga que $\eta_1 = f(z, \bar{z})dz \wedge d\bar{z}$ es una 2-forma C^∞ en la coordenada z , definida en un abierto V_1 . Suponga además que $\eta_2 = g(w, \bar{w})dw \wedge d\bar{w}$ es una 2-forma C^∞ en la coordenada w , definida en un abierto V_2 . Sea $z = T(w)$ la cual define una función analítica de V_2 a V_1 . Decimos que η_1 *transforma a* η_2 *bajo* T si $g(w, \bar{w}) = f(T(w), \overline{T(w)})\|T'(w)\|^2$.

Podemos definir entonces análogo a las 1-formas, las 2-formas en una superficie de Riemann.

Definición 7.1.13. Sea X una superficie de Riemann. Una 2-forma C^∞ en X es una colección $\{\eta_\phi\}$ de 2-formas C^∞ , una para cada carta $\phi : U \rightarrow V$ en la variable del recorrido V , tales que si dos cartas $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ (para $i = 1, 2$) tienen dominios cuya intersección es no vacía, entonces la 2-forma asociada η_{ϕ_1} transforma a η_{ϕ_2} bajo la función transición $T = \phi_1 \circ \phi_2$.

Así mismo como en las 1-formas, basta tener definidas las 2-formas para cada carta compleja en algún atlas complejo para definir las en toda la estructura compleja.

7.2. Integración en una Superficie de Riemann

Ahora contamos con las herramientas necesarias para integrar en una superficie de Riemann. Para esto usaremos fuertemente la noción de curva cerrada en la superficie. Daremos a continuación algunas propiedades de los caminos.

Si $F : X \rightarrow Y$ es una función C^∞ entre superficies de Riemann X e Y y γ es un camino en X , entonces $F \circ \gamma$ es camino en Y .

Sea p un punto en una superficie de Riemann X , y sea S un subconjunto de X cuya clausura no contiene al punto p . Entonces existe una curva cerrada γ en X con las siguientes propiedades

- γ es $1 - 1$ y la imagen de γ yace completamente en el interior del dominio U de una carta $\phi : U \rightarrow V$ en X .
- La curva cerrada $\phi \circ \gamma$ en V tiene índice 1 en torno a $\phi(p)$.
- Ningún punto de S que yace en el dominio U es mapeado al interior de $\phi \circ \gamma$.

Decimos que tal camino es un *camino pequeño encerrando a p que no encierra a ningún punto de S* .

Notamos que esta definición es independiente de la elección de la carta compleja usada. Así, esta curva pa podemos arreglar de modo que

- La carta usada ϕ esté centrada en p .
- El dominio de γ sea $[0, 2\pi]$.
- La curva cerrada $\phi \circ \gamma$ en V sea exactamente el camino $z(t) = r \exp(it)$ para algún número real $r > 0$, en la coordenada local z de V .

Finalmente queda claro que el interior de un camino pequeño encerrando a p está bien definido, esta es una componente conexa de $X \setminus \text{imagen}(\gamma)$ que contiene a p .

Suponga que γ_1 y γ_2 son dos caminos en X con punto final de γ_1 igual al punto inicial de γ_2 . Entonces existe un camino γ en X con dominio $[0, 1]$ tal que $\gamma_{[0, 1/2]}$ y $\gamma_{[1/2, 1]}$ reparametrizaciones de γ_1 y γ_2 respectivamente. Este proceso se conoce como concatenación de dos caminos. Uno puede extender eso de manera inductiva a una cantidad finita de caminos.

Por otra parte, si γ es un camino en X con dominio $[a, b]$, entonces toda partición de la forma $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ del intervalo dado, entrega una descomposición de γ en n caminos de los cuales γ es su concatenación. Estos caminos se llaman una *partición* del camino γ .

Lema 7.2.1. Sea γ un camino en una superficie de Riemann X . Entonces γ puede ser particionado en un número finito de caminos $\{\gamma_i\}$, cada uno de ellos C^∞ , tal que la imagen de cada uno está contenido en una sola carta de X .

Demostración:

Este resultado es inmediato de la compacidad del intervalo en el cual está definido γ . En efecto, consideremos un cubrimiento abierto de dominios de cartas para la imagen de γ en X . Cada elemento del cubrimiento define un camino γ_i cuya imagen está contenida en la imagen de γ . Si consideramos los dominios de $\{\gamma_i\}$ entonces obtendremos un cubrimiento abierto para el dominio de γ . Por compacidad tendremos un subcubrimiento abierto finito de este para el dominio de γ . Podemos modificar dichos dominios para obtener el resultado buscado.

□

Con el fin de definir integrales de 1-formas a lo largo de caminos en una superficie de Riemann consideraremos una 1-forma C^∞ ω en una superficie de Riemann X . Sea γ un camino en X . Escogemos una partición $\{\gamma_i\}$ de γ tal que γ_i es C^∞ en su dominio $[a_{i-1}, a_i]$ y su imagen está contenida en un dominio U_i de una carta ϕ_i . Luego, con respecto a cada carta ϕ_i , la 1-forma w como $\omega = f_i(z, \bar{z})dz + g_i(z, \bar{z})d\bar{z}$. Consideremos la composición $\phi_i \circ \gamma_i$ como una función

$z = z(t)$ para t en el dominio de γ_i .

Definición 7.2.2. Con la notación anterior, definimos *la integral de ω a lo largo de γ* como el número complejo

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_i \int_{t=a_{i-1}}^{a_i} [f_i(z(t), \overline{z(t)})z'(t) + g_i(z(t), \overline{z(t)})\overline{z'(t)}]dt.$$

Notemos que si la imagen de γ está totalmente contenida en el dominio de una sola carta $\phi : U \rightarrow V$, y si $\omega = f dz + g d\bar{z}$ en esta carta, entonces

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\phi \circ \gamma} f dz + g d\bar{z}$$

donde la integral del lado derecho de la igualdad es la integral usual a lo largo de una curva en un dominio del plano complejo.

En primera instancia debemos notar que la integral está bien definida, es decir, que el valor de dicha integral es independiente de la elección de la carta. Esto es resultado de la definición de 1-formas C^∞ en superficies de Riemann. Por otro lado es evidente que la integral es independiente de la partición del camino γ .

Además también es claro que la integral es lineal en ω , es decir

$$\int_{\gamma} (\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda \int_{\gamma} \omega_1 + \mu \int_{\gamma} \omega_2.$$

Lo anterior es evidente por la linealidad de la integral en cada recorrido de la carta escogida.

Definición 7.2.3. Sea ω una 1-forma en una superficie de Riemann X la cual es meromorfa en un punto $p \in X$. Escogemos una coordenada local z centrada en p , entonces podemos escribir ω via su serie de Laurent asociada de la forma

$$\omega = f(z)dz = \left(\sum_{n=-M}^{\infty} c_n z^n \right) dz$$

donde $c_{-M} \neq 0$.

Se define el *residuo* de ω en p , denotado por $Res_p(\omega)$, como el coeficiente c_{-1} en la serie de Laurent para ω en p .

Es claro que así definida, el residuo de la 1-forma no está necesariamente bien definida, pues depende de la coordenada local que hayamos escogido. Sin embargo está bien definida por el siguiente lema.

Lema 7.2.4. Sea ω una 1-forma meromorfa definida en una vecindad de $p \in X$. Sea γ un pequeño camino que encierra a p que no encierra otro polo de ω . Entonces

$$Res_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \omega.$$

Demostración:

Sea $\phi : U \rightarrow V$ una carta en X centrada en p que contiene la imagen de γ , entonces γ satisface la condición de pequeño camino que encierra a p con respecto a la carta. Escribimos $\omega = f(z)dz$ en la coordenada local z en V , y asumamos que $f(z)$ tiene una serie de Laurent asociada de la forma $\sum_n c_n z^n$. Entonces

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\phi \circ \gamma} f(z)dz = 2\pi i c_{-1}$$

por el Teorema del Residuo en el plano complejo. □

Sea T un triángulo en una superficie de Riemann X , la cual es homeomorfa a un triángulo en \mathbb{C} . Supongamos que T está contenido completamente en el dominio de una carta compleja $\phi : U \rightarrow V$. Entonces, si η es una 2-forma C^∞ en X , podemos escribir $\eta = f(z, \bar{z})dz \wedge d\bar{z}$ en esta carta. Con esta notación podemos definir

$$\begin{aligned} \int \int_T \eta &= \int \int_{\phi T} f(z, \bar{z})dz \wedge d\bar{z} \\ &= \int \int_{\phi T} (-2i)f(x + iy, x - iy)dx \wedge dy \end{aligned}$$

en la cual la última integral es la integral usual sobre \mathbb{C} en una superficie.

Notemos que si η está contenida en el dominio de dos cartas, entonces la integral anterior está bien definida, esto sigue por noción de compatibilidad de las 2-formas en cada carta, lo cual permite el cambio de variable en la doble integral.

Supongamos ahora que $D \subset X$ es un conjunto triangulable cerrado. Entonces, podemos definir $\int \int_D \eta$ por una triangulación de D que satisfaga que cada triángulo está completamente contenido en el dominio de alguna carta, entonces separamos la integral como suma de integrales sobre triángulos. Esta definición de integral debe estar bien definida. Es fácil ver que si un triángulo es subdividido, entonces la doble integral sobre ese triángulo toma el mismo valor que la suma de las dobles integrales sobre las subdivisiones del triángulo. Por tanto, como dos triangulaciones distintas tienen un mismo refinamiento, la doble integral sobre las dos triangulaciones deben ser iguales, y por tanto la integral está bien definida.

Teorema 7.2.5. (Teorema de Stokes) Sea D un conjunto cerrado triangulable en una superficie de Riemann X y sea $\omega = f dz + g d\bar{z}$ una 1-forma C^∞ en X . Entonces

$$\int_{\partial D} \omega = \int \int_D d\omega$$

donde $d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)dz \wedge d\bar{z}$.

Demostración:

Basta mostrar el teorema para un triángulo totalmente contenido en una carta compleja, el resto se deduce de la aditividad de la integral con respecto a triángulos que componen la triangulación. Sea T un triángulo en D , debemos mostrar que

$$\int_{\partial T} \omega = \int \int_T d\omega.$$

Lo anterior sigue al transferir cada integral al plano complejo vía la carta compleja. Las integrales transferidas son iguales por el Teorema de Green en el plano complejo.

□

Teorema 7.2.6. (Teorema del Residuo) Sea ω una 1-forma meromorfa en una superficie de Riemann compacta. Entonces

$$\sum_{p \in X} \text{Res}_p(\omega) = 0.$$

Demostración:

Sabemos que, como X es compacta, el conjunto de polos de ω es finito. Sean p_1, p_2, \dots, p_n los polos de ω . Para cada polo podemos escoger un pequeño camino γ_i en X que encierra a p_i de modo que ningún otro polo de ω se encuentre en el interior U_i de γ_i .

Sabemos que

$$\int_{\gamma_i} \omega = 2\pi i \text{Res}_{p_i}(\omega).$$

Sea $D = X \setminus \bigcup_i U_i$. D es triangulable pues X lo es y D es un subconjunto cerrado de X . Sea $\partial D = -\sum_i \gamma_i$ una cadena de caminos en X (el análogo a una cadena en el plano complejo). Así

$$\begin{aligned} \sum_i \text{Res}_{p_i}(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_i \int_{\gamma_i} \omega \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\sum_i \gamma_i} \omega \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D} \omega \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int \int_D d\omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

esto pues en una vecindad de D se tiene $w = fdz + gd\bar{z}$, $g = 0$ y f depende solo de z , pues ω es analítica en dicha vecindad. Así $d\omega = 0$ en D .

□

Para finalizar esta sección, demostraremos nuevamente la proposición 4.4.10. Para esto consideraremos un resultado interesante de las funciones meromorfas definidas en el plano complejo, la cual es que podemos determinar el orden de dichas funciones en un punto a partir de una función auxiliar en particular. Extenderemos este resultado a superficies de Riemann.

Lema 7.2.7. Sea X una superficie de Riemann, suponga que f es una función meromorfa en $p \in X$. Entonces df/f es una 1-forma meromorfa en p , y

$$\text{Res}_p(df/f) = \text{ord}_p(f).$$

Demostración:

Escojamos una carta centrada en p , con coordenada local z , y asumamos que $\text{ord}_p(f) = n$. Así podemos escribir f como $f = a_n z^n +$ términos de orden superior, en torno a p . De esta forma $df = (na_n z^{n-1} +$ términos de orden superior $)dz$ en una vecindad de p , así, $df/f = (n/z +$ términos de orden superior $)dz$, el cual claramente es una 1-forma meromorfa tal que $\text{Res}_p(df/f) = n = \text{ord}_p(f)$.

□

Si consideramos entonces f una función meromorfa en una superficie de Riemann X , y $\omega = df/f$ una 1-forma meromorfa en X , por Teorema del Residuo y el lema anterior, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 7.2.8. Sea f una función meromorfa no constante en una superficie de Riemann compacta X . Entonces

$$\sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) = 0.$$

8. Métrica en una Superficie de Riemann

En esta sección veremos cómo podemos asignarle a una superficie de Riemann una métrica de modo que sea conforme, invariante bajo automorfismos y tal que la curvatura de la superficie sea constante. En primera instancia veremos cómo definir dicha métrica en superficies de Riemann simplemente conexas y luego extenderemos la métrica a cualquier superficie vía el *Teorema de Uniformización*.

8.1. Automorfismos y Métricas Invariantes

El primer paso para entender el funcionamiento de la métrica será caracterizar los automorfismos en las tres superficies de Riemann simplemente conexas canónicas. En particular, la esfera de Riemann tiene automorfismos que se pueden caracterizar como sigue:

Consideremos $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una transformación de Möbius de grado uno; esto es,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. Dicha función se puede extender a un isomorfismo $\hat{f} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$; esto es, un automorfismo de la esfera de Riemann. No es difícil probar que todos los automorfismos conformes de la esfera de Riemann son extensiones de transformaciones de Möbius.

Por simple analogía podemos probar que los automorfismos conformes del plano complejo son de la forma $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = az + b$ con $a \neq 0$.

Finalmente, un automorfismo conforme del disco unitario, $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es de la forma

$$f(z) = \exp(i\theta) \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

para $a \in \mathbb{D}$ y $\theta \in [0, 2\pi)$, o escrito de otra forma

$$f(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$$

para $a, c \in \mathbb{C}$ y $|a|^2 - |c|^2 = 1$.

Ahora que hemos caracterizado los automorfismos en cada una de las superficies de Riemann simplemente conexas canónicas, consideremos la siguiente definición.

Definición 8.1.1. Una métrica Riemanniana conforme en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, es una métrica que se puede expresar de la forma $ds = \lambda(z)|dz|$, donde $\lambda : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ es una función de clase C^∞ . Una métrica se dirá *invariante* bajo un automorfismo conforme $w = f(z)$ si y sólo si $\lambda(w)|dw| = \lambda(z)|dz|$, o equivalentemente

$$\lambda(f(z))|f'(z)| = \lambda(z).$$

En general diremos que f es una *isometría* con respecto a la métrica.

Consideremos la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ . Nos interesa dotar de una métrica a dicha superficie de Riemann de modo que la métrica sea conforme. Recordemos que las cartas definidas en el atlas de la esfera de Riemann las hicimos de acuerdo a la proyección estereográfica, por tanto intentaremos definir esta métrica usando dicha proyección.

Sea $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ la esfera unitaria S^2 en \mathbb{R}^3 . Así definida, la proyección estereográfica queda determinada como una función de $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ en \mathbb{C} de la forma

$$(\xi, \eta, \zeta) \mapsto \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} = z.$$

Dicha función puede ser extendida a un difeomorfismo entre S^2 y \mathbb{C}_∞ . La inversa de la función es

$$z \mapsto \left(\frac{2\Re(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\Im(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Si escribimos $x = \Re(z)$, $y = \Im(z)$, obtenemos

$$d\xi = \frac{2(1 - x^2 + y^2)dx - 4xydy}{(1 + |z|^2)^2}$$

$$d\eta = \frac{2(1 + x^2 - y^2)dy - 4xydx}{(1 + |z|^2)^2}$$

$$d\zeta = \frac{4xdx + 4ydy}{(1 + |z|^2)^2}.$$

Por otro lado sabemos que la métrica euclideana está dada por

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$$

La cual inducirá mediante las ecuaciones anteriores una métrica en \mathbb{C}_∞ . A saber,

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 + |z|^2)^2}.$$

Como las métricas son positivas, se deduce que $ds = \frac{2\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{(1 + |z|^2)}$, o equivalentemente

$$ds = \frac{2|dz|}{(1 + |z|^2)}.$$

Llamamos entonces a $\lambda : \mathbb{C}_\infty \rightarrow (0, \infty)$, por $\lambda(z) = \frac{2}{1 + |z|^2}$.

Definición 8.1.2. Sea X la esfera de Riemann. Se define la métrica ds en X por $ds = \lambda(z)|dz|$, con $\lambda(z) = \frac{2}{1 + |z|^2}$ con $z \neq \infty$. En $z = \infty$ consideramos λ en términos de la coordenada local $1/z$.

La motivación ahora es encontrar las isometrías en la esfera de Riemann con respecto a la métrica definida anteriormente. Sabemos que si $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$, entonces f puede representarse únicamente por un elemento en el *Grupo Projectivo Lineal*

$$GL(2, \mathbb{C}) / \{\lambda \cdot id \mid \lambda \neq 0\}.$$

Consideremos f de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ tal que } ad - bc \neq 0,$$

entonces $[f]$, la matriz que representa a la clase de equivalencia en el grupo proyectivo lineal, será

$$[f] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ con } \det([f]) \neq 0.$$

Proposición 8.1.3. Sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$. f será isometría respecto a la métrica $(2/(1 + |z|^2))|dz|$ si y sólo si $[f]$ tiene la forma

$$[f] = \begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} \text{ y } \det([f]) = 1.$$

Demostración:

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $[f]$ tiene determinante igual a 1. Recordemos que f es isometría si y sólo si $\lambda(f(z))|f'(z)| = \lambda(z)$, $z \in \mathbb{C}_\infty$, o equivalentemente si y sólo si

$$\frac{1}{1 + |z|^2} = \frac{1}{|az + b|^2 + |cz + d|^2}.$$

Si se cumple

$$[f] = \begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{|az + b|^2 + |cz + d|^2} &= \frac{1}{|az - \bar{c}|^2 + |cz + \bar{a}|^2} \\ &= \frac{1}{(az - \bar{c})(\bar{a}z - c) + (cz + \bar{a})(\bar{c}z + a)} \\ &= \frac{1}{1 + |z|^2} \end{aligned}$$

Si suponemos el converso, o sea, que f es isometría, se tiene

$$1 + |z|^2 = |az + b|^2 + |cz + d|^2$$

o equivalentemente

$$1 + |z|^2 = (|a|^2 + |c|^2)|z|^2 + (c\bar{d} + a\bar{b})z + (d\bar{c} + b\bar{a})\bar{z} + |b|^2 + |d|^2,$$

lo cual sucede siempre y cuando $|a|^2 + |c|^2 = 1$, $|b|^2 + |d|^2 = 1$ y $c\bar{d} + a\bar{b} = 0$. Además se tiene $ad - bc = 1$, por lo que

$$\begin{aligned} c\bar{d} + a\bar{b} = 0 &\Rightarrow bc\bar{d} + ab\bar{b} = 0 \\ &\Rightarrow (ad - 1)\bar{d} + a|b|^2 = 0 \\ &\Rightarrow a(|b|^2 + |d|^2) - \bar{d} = 0 \\ &\Rightarrow a = \bar{d}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c\bar{d} + a\bar{b} = 0 &\Rightarrow c\bar{a}\bar{d} + a\bar{a}\bar{b} = 0 \\
&\Rightarrow c\bar{a}\bar{d} + \bar{b}|a|^2 = 0 \\
&\Rightarrow c(1 + \bar{b}c) + \bar{b}|a|^2 = 0 \\
&\Rightarrow c + \bar{b}(|a|^2 + |c|^2) = 0 \\
&\Rightarrow c = -\bar{b}.
\end{aligned}$$

de donde se tiene lo buscado.

□

Ahora que hemos caracterizado las isometrías respecto a la métrica de la esfera de Riemann, debemos dotar al plano complejo de una métrica y caracterizar las isometrías respecto a ella. La métrica sin embargo, no necesita mucha explicación, pues el plano complejo es isomorfo a \mathbb{R}^2 , por tanto dotaremos a \mathbb{C} de la métrica euclídeana.

Proposición 8.1.4. Sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. f será isometría respecto a la métrica $|dz|$ si y sólo si f tiene la forma $f(z) = \exp(i\theta)z + b$, con $\theta \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{C}$.

Demostración:

Sabemos que f tiene la forma $f(z) = az + b$. Luego, f es isometría si y sólo si $|f'(z)| = 1$, es decir $|a| = 1$, o equivalentemente $a = \exp(i\theta)$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$.

□

Consideremos ahora el disco unitario, y un automorfismo de él, digamos $f(z) = (az + c)/(cz + \bar{a})$. Sea $\lambda(0) = 2$, fijo, y supongamos que $f(0) = z_0$. Así, f queda inmediatamente determinado por la fórmula $f(z) = (z + \bar{z}_0)/(1 + \bar{z}_0 z)$.

Necesariamente se debe satisfacer $\lambda(z_0)|f'(0)| = \lambda(0)$, esto por la definición de isometría. Es decir $\lambda(z_0) = 2|f'(0)|^{-1}$, pero si derivamos f y evaluamos en cero, nos queda $f'(0) = 1 - |z_0|^2$, por tanto $|f'(0)| = 1 - |z_0|^2$. Finalmente se deduce

$$\lambda(z_0) = \frac{2}{1 - |z_0|^2}.$$

Así se define la métrica ds en \mathbb{D} como $ds = \lambda|dz|$ con $\lambda : \mathbb{D} \rightarrow (0, \infty)$ definida por $\lambda(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}$.

Proposición 8.1.5. Sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Entonces f es isometría respecto a la métrica $ds = \lambda|dz|$ con $\lambda(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}$.

Demostración:

Sabemos que $f(z) = (az + \bar{c})/(cz + \bar{a})$ con $|a|^2 - |c|^2 = 1$, por tanto

$$\begin{aligned}
\lambda(f(z))|f'(z)| &= \frac{1}{1 - \frac{|az+\bar{c}|^2}{|cz+\bar{a}|^2}} \frac{1}{|cz + \bar{a}|^2} \\
&= \frac{1}{|cz + \bar{a}|^2 - |az + \bar{c}|^2} \\
&= \frac{1}{1 - |z|^2}
\end{aligned}$$

□

Ahora estamos listos para introducir el concepto de *Curvatura Gaussiana* de una métrica conforme.

Definición 8.1.6. Sea $ds = \lambda(z)|dz|$ una métrica conforme con $z = x + iy$. Un cálculo de la *Curvatura Gaussiana* respecto a la métrica ds , está dado por

$$\mathcal{K} = \frac{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 - \lambda(\lambda_{xx} + \lambda_{yy})}{\lambda^4},$$

donde los subíndices denotan las derivadas parciales.

Proposición 8.1.7. La curvatura Gaussiana en las superficies de Riemann canónicas es constante. En el caso de la esfera de Riemann, $\mathcal{K} = 1$, en el caso del plano complejo, $\mathcal{K} = 0$ y en el caso del disco unitario, $\mathcal{K} = -1$.

8.2. Distancias en Superficies de Riemann Simplemente Conexas

A continuación se harán explícitos algunos resultados referentes a distancias en las superficies de Riemann canónicas según las métricas vistas en la sección anterior.

Definición 8.2.1. Sea X una superficie de Riemann, $p, q \in X$. Se define la distancia entre p y q , denotada por $d(p, q)$, como el ínfimo de los largos de curvas en X con punto inicial p y punto final q .

$$d(p, q) = \inf\{l(\gamma(t)) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow X, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}.$$

Según la definición anterior podemos asegurar que si X es una superficie de Riemann simplemente conexa, entonces siempre existe una curva que une los puntos p y q cuyo largo es mínimo, esto sigue de que podemos encontrar un subconjunto de X , compacto, que contenga a p y q . El argumento restante lo veremos mas adelante.

Proposición 8.2.2. Sea X la esfera de Riemann y $p, q \in X$. Entonces la curva minimal que une a p y q es un segmento de una circunferencia con centro el centro de X .

Demostración:

Sabemos que $\lambda(z) = \frac{2}{1+|z|^2}$, define la métrica en $X = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $p, q \neq \infty$. Podemos suponer además (por un argumento de rotación de la esfera de Riemann) que $q = 0$ y $p = x$.

Así, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una curva tal que γ une p con q , se tiene

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \frac{2}{1+|\gamma(t)|^2} |\gamma'(t)| dt \\ &\geq \left| \int_0^1 \frac{2}{1+\gamma(t)^2} \gamma'(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^x \frac{2}{1+u^2} du \right| \\ &= 2 \arctan(x) \end{aligned}$$

Es fácil verificar que la igualdad se cumple para la curva $\gamma(t) = tx$, de forma que, generalizando vía rotación en el plano complejo, se tiene que si $p = z$ y $q = 0$. La curva geodésica aquí descrita, vista en la esfera de \mathbb{R}^3 , corresponde a un arco de circunferencia que pertenece a uno de los meridianos de la esfera. Finalmente

$$d(0, z) = 2 \arctan(|z|)$$

□

Proposición 8.2.3. Sea X el plano complejo y $p, q \in X$. Entonces la curva minimal que une a p y q es un segmento de recta.

Demostración:

Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, una curva que une los puntos p y q en el plano tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. De esta forma se tiene

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &\geq \int_0^1 |x'(t)| dt \\ &\geq \int_0^1 x'(t) dt \end{aligned}$$

Como las rotaciones y traslaciones en el plano complejo son isometrías, podemos suponer $p = 0$ y $q = x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 0$. Es decir, la curva $\alpha : [0, x] \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\alpha(t) = (t, 0)$ alcanza el mínimo de la expresión anterior. La curva α es un segmento de recta, es decir, los segmentos de recta minimizan distancias en \mathbb{C} .

□

Proposición 8.2.4. Sea X el disco unitario y $p, q \in X$. Entonces la curva minimal que une a p y q es un arco de circunferencia que corta ortogonalmente al disco unitario. En el caso que los puntos p y q sean colineales con el origen, la curva que minimiza distancias entre p y q será el segmento de recta que los une.

Demostración:

Considerar sin pérdida de generalidad, $p = x$ y $q = 0$, con $0 \leq x < 1$. Entonces, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ es una curva que une los puntos p y q , se tiene

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \frac{2}{1 - |\gamma(t)|^2} |\gamma'(t)| dt \\ &\geq \left| \int_0^1 \frac{2}{1 - \gamma(t)^2} \gamma'(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^x \frac{2}{1 - u^2} du \right| \\ &= \left| \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right| \\ &\geq \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \end{aligned}$$

De tal manera que, como las rotaciones son isometrías en el disco unitario, se tiene

$$d(0, z) = \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)$$

con $\gamma(t) = tz$ para $0 \leq t \leq 1$, la única geodésica que une 0 con z .

Consideremos ahora z_1 y z_2 don puntos arbitrarios. Sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ tal que $f(z_1) = 0$. Sea $p = f(z_2)$. La curva geodésica que une z_1 con z_2 es $f^{-1}(\gamma)$, donde γ es la porción de diámetro que une 0 con p . Mas adelante mostraremos que los automorfismos preservan círculos, luego, como además preservan ángulos, se tiene que $f^{-1}(\gamma)$ es un arco de circunferencia ortogonal a \mathbb{D} .

□

8.3. Extensión de Métrica

En la sección 7 vimos que toda superficie de Riemann proviene de una de las tres superficies de Riemann canónicas. Si consideramos las métricas descritas en la subsección anterior, podemos dotar de la superficie original de una métrica, inducida por la de su espacio de cubrimiento universal, de modo que la superficie de Riemann tenga curvatura constante.

Definición 8.3.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Una secuencia (x_n) de puntos de X se dice de *Cauchy* en (X, d) si satisface que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad n, m \geq N$$

Diremos que (X, d) es *completo* si toda secuencia de Cauchy converge en X .

De acuerdo a la definición anterior, podemos asegurar que el plano complejo dotado de la métrica Riemanniana es completo, pues \mathbb{R}^2 lo es. Por otra parte, la métrica Riemanniana definida en la esfera de Riemann es completa debido a la compacidad de la esfera. Por último, debemos analizar la topología del disco unitario con la métrica Riemanniana introducida en esta sección.

Un círculo hiperbólico con centro en el origen y de radio r será

$$C := \{z \in \mathbb{D} \mid d(0, z) = r\}$$

es decir

$$r = d(0, z) = \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)$$

y luego

$$|z| = \frac{\exp(r) - 1}{\exp(r) + 1}$$

el cual es un círculo euclideo.

Supongamos de manera general que $C := \{z \in \mathbb{D} \mid d(z, w) = r\}$, círculo hiperbólico centrado en w de radio r . Podemos considerar un automorfismo del disco f de modo que mande w en 0 , entonces $r = d(w, z) = d(0, f(z))$, y por tanto $f(C) := \{\zeta \in \mathbb{D} \mid d(0, \zeta) = r\}$, el cual es un círculo euclideo. Como f^{-1} es un automorfismo del disco, este preserva círculos, de donde sigue que C es también un círculo euclideo.

Finalmente, es posible mostrar que todo círculo euclideo es hiperbólico, por tanto hay una correspondencia biunívoca entre círculos euclideos y círculos hiperbólicos, por tanto, las topologías coinciden debido a que los discos forman una base para la topología euclidea.

De lo anterior, si consideramos (z_n) una secuencia de Cauchy en el disco, se tiene $\{d(0, z_n)\}$ es acotada, y por tanto, como (z_n) es también secuencia de Cauchy en la métrica euclidea, se deduce la convergencia, es decir, el disco unitario dotado de la métrica Riemanniana respectiva es completo con esa métrica.

Proposición 8.3.2. Sea X una superficie de Riemann. Podemos dotar a X de una métrica Riemanniana que sea completa y cuya curvatura sea constante.

Demostración:

Sea $F : U_0 \rightarrow X$ función del cubrimiento universal y G el correspondiente grupo de transformaciones. Vimos anteriormente que G es un grupo de automorfismos de U_0 , es posible probar que G es grupo de isometrías (si U_0 es el disco unitario el caso es trivial). Por tanto, como la métrica es invariante por G , esta se proyecta a una métrica en X . Como la curvatura está definida localmente, será constante en X por la conexidad de X . La curvatura está bien definida pues los cambios de coordenadas locales satisfacen ser analíticos. La métrica Riemanniana en X define largo de curvas en X , y por tanto, podemos definir distancia en X .

Sean $p, q \in X$ y sea $d = \inf\{d(\xi, \eta) \mid F(\xi) = p, F(\eta) = q\}$.

Sea γ cualquier curva que une ξ con η en U_0 tal que $F(\xi) = p$ y $F(\eta) = q$. Entonces $F(\gamma)$ es una curva en X que une p con q . Es claro que $L(F(\gamma)) = L(\gamma)$, por tanto

$$d(p, q) \leq L(F(\gamma)) = L(\gamma)$$

pero al ser γ arbitrario se tiene

$$d(p, q) \leq d(\xi, \eta)$$

y al ser ξ y η arbitrarios

$$d(p, q) \leq d.$$

Por otro lado, si γ es una curva cualquiera que une p y q , esta se levanta a una curva $\tilde{\gamma}$ que une ξ con η , del mismo largo. Así

$$L(\gamma) = L(\tilde{\gamma}) \geq d(\xi, \eta) \geq d$$

y luego

$$d(p, q) \geq d.$$

Finalmente, hemos probado que

$$d(p, q) = \inf\{d(\xi, \eta) \mid F(\xi) = p, F(\eta) = q\}. (*)$$

Finalmente se deduce que la métrica en X es completa pues las métricas Riemannianas definidas en las superficies de Riemann canónicas son completas y por (*) se tiene la convergencia en X .

□

Para finalizar esta sección se dejarán expuestos algunos resultados respecto a integración sobre una superficie de Riemann, definiendo de partida una 2-forma en las superficies de Riemann canónicas.

Proposición 8.3.3. Sea X una superficie de Riemann con espacio de cubrimiento universal U_0 . En U_0 se define

$$\eta = \lambda(z)^2 dz \wedge d\bar{z}$$

una 2-forma inducida por la métrica Riemanniana λ correspondiente a U_0 . Entonces η es invariante sobre el cubrimiento $F_0 : U_0 \rightarrow X$, así, η se proyecta a una 2-forma C^∞ en X .

Teorema 8.3.4. (Gauss-Bonnet) Sea X una superficie de Riemann compacta de género g . Entonces

$$\int \int_X \mathcal{K} dA = 2\pi(2 - 2g)$$

donde

$$dA = \frac{1}{2} \lambda(z)^2 |dz \wedge d\bar{z}|$$

es el argumento de área y \mathcal{K} es la curvatura Gaussiana.

9. Geometría Diferencial y Superficies de Riemann

Ahora estamos en condiciones de probar la existencia de curvas geodésicas en superficies de Riemann compactas. Pero primero, veamos algunas definiciones y teoremas que nos permitirán demostrarlo.

9.1. Existencia de Curvas Geodésicas

Definición 9.1.1. Un conjunto \mathcal{C} en un espacio topológico X se dice *relativamente compacto* si toda sucesión de elementos de \mathcal{C} tiene una subsucesión que converge en X .

Definición 9.1.2. Sea (X, τ) espacio topológico, (Y, d) espacio métrico, y $x_0 \in X$. Un conjunto H de funciones de X en Y se dice *equicontinuo* si y solo si para todo $r > 0$ existe un entorno U de x_0 tal que para todo $f \in H$ se tiene $f(U) \subset B(f(x_0), r)$.

Teorema 9.1.3. (Ascoli-Arzela) Sea X un espacio topológico compacto, Y un espacio métrico completo. Un conjunto H de funciones de X en Y será relativamente compacto en la topología del supremo si y solo si

- H es equicontinuo
- para todo $x \in X$, el conjunto $H_x = \{f(x) \mid f \in H\}$ es relativamente compacto.

Definición 9.1.4. Un conjunto \mathcal{L} de curvas cerradas en una superficie de Riemann X es llamada *clase de homotopía libre* si dado $f \in \mathcal{L}$ y $g : [0, 1] \rightarrow X$ tales que existe una homotopía

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad F(0, t) = f(t), \quad F(1, t) = g(t), \quad F(s, 0) = F(s, 1),$$

entonces $g \in \mathcal{L}$. El conjunto de tales clases se denota por $C_1(X)$

Teorema 9.1.5. (Cartan) Sea X una superficie de Riemann compacta y $\mathcal{L} \in C_1(X)$ una clase de homotopía libre distinta a la clase trivial, entonces, existe una curva geodésica cerrada de X en la clase \mathcal{L} .

Demostración:

Sea d el ínfimo de los largos de curvas diferenciables por tramos que yacen en \mathcal{L} . Como \mathcal{L} es distinta a la clase trivial, se tiene que $d > 0$. Consideremos (γ_i) una secuencia de curvas diferenciables por tramos que yacen en \mathcal{L} tales que $L(\gamma_i)$ tiende a d . Podemos suponer, sin perder generalidad, que γ_i está parametrizada de modo que está definida en el intervalo $[0, 1]$. Sea $M = \sup_i L(\gamma_i)$. Entonces

$$d(\gamma_i(t_1), \gamma_i(t_2)) \leq \int_{t_1}^{t_2} |\gamma_i'(t)| dt \leq M(t_2 - t_1)$$

para cada $t_1 < t_2 \in [0, 1]$. Así, el conjunto $\{\gamma_i\}$ es equicontinuo. Como X es compacto se tiene, por teorema de Ascoli-Arzelà, que existe una subsecuencia de γ_i , que converge uniformemente a una curva cerrada continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$.

Observamos que, bajo el mismo argumento anterior, se puede demostrar que dados dos puntos en una superficie de Riemann simplemente conexa, existe una curva geodésica que los une.

Sea $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ una partición del intervalo $[0, 1]$ tal que $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$, $j = 0, \dots, k$, está contenida totalmente en una vecindad normal (en una vecindad normal se puede asegurar la existencia de curvas geodésicas locales). Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ una curva diferenciable por tramos tal que $\alpha^j = \alpha|_{[t_{j-1}, t_j]}$ es el único segmento geodésico que une los puntos $\gamma(t_{j-1})$ y $\gamma(t_j)$. Trivialmente se tiene que $\alpha \in \mathcal{L}$, así $L(\alpha) \geq d$.

Supongamos que $L(\alpha) > d$, sea $\varepsilon = \frac{L(\alpha) - d}{2k+1}$. Entonces existe i tal que

$$L(\gamma_i) - d < \varepsilon \text{ y } d(\gamma_i(t), \gamma) < \varepsilon, \text{ para todo } t \in [0, 1]$$

Denotando $\gamma_i^j = \gamma_i|_{[t_{j-1}, t_j]}$, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k (L(\gamma_i^j) + 2\varepsilon) &= L(\gamma_i) + 2k\varepsilon \\ &< d + (2k+1)\varepsilon \\ &= L(\alpha) \\ &= \sum_{j=1}^k L(\alpha^j) \end{aligned}$$

Es decir, existe un entero j , tal que $1 \leq j \leq k$, con

$$L(\gamma_i^j) + 2\varepsilon < L(\alpha^j)$$

lo que contradice el hecho que α^j sea geodésica. Esto prueba que $L(\alpha) = d$.

Hemos mostrado que la curva geodésica es en efecto diferenciable por tramos. Mostraremos que es diferenciable en todo su dominio.

Supongamos que α está parametrizada por longitud de arco. Entonces, $\alpha : [0, d] \rightarrow X$ es una curva geodésica de largo mínimo en la clase \mathcal{L} . Mostraremos que α es regular en los puntos $p_j = \alpha(t_j)$, para todo $j = 0, \dots, k$.

Supongamos que no, entonces, en un punto p_j , no regular, consideremos una bola convexa centrada en p_j . Escogemos q_1 y q_2 en $\alpha \cap B$ de modo que el triángulo geodésico $p_j q_1 q_2$ sea homotópico a un punto. Entonces, la curva cerrada constituida por la geodésica mínima $q_1 q_2$ y el arco de α que une los puntos q_1 y q_2 que no contiene a p_j está en la clase de \mathcal{L} y tiene menor largo que α , lo cual es una contradicción.

□

9.2. Superficies de Riemann Compactas de Curvatura Negativa

Definición 9.2.1. Sea X una superficie de Riemann compacta y $p, q, r \in X$. Un *Triángulo Geodésico* es el único triángulo en X , de vértices p, q y r tal que sus lados son segmentos de curvas geodésicas.

Lema 9.2.2. Sea X una superficie de Riemann de curvatura negativa y T un triángulo geodésico en X . Luego, la suma de los ángulos interiores de T es menor que 2π .

Demostración:

Si X tiene curvatura negativa entonces su espacio de cubrimiento universal es \mathbb{D} y T se levanta vía la función de cubrimiento a algún triángulo geodésico T' en \mathbb{D} . Como la función de cubrimiento es holomorfa entonces la suma de los ángulos interiores de T es igual a la suma de los ángulos interiores de T' . Los lados de T' son arcos de circunferencias ortogonales a \mathbb{D} , luego la suma de los ángulos interiores de T' es menor que 2π lo que prueba el lema.

□

Podemos observar que el lema anterior asegura que en superficies de Riemann de género $g \geq 2$ se tiene existe un polígono en \mathbb{D} tal que, vía una identificación de lados adecuada, determina a X .

Vimos que en una superficie de Riemann compacta podemos asegurar la existencia de curvas geodésicas cerradas en cada clase de curvas homotópicas libres no triviales. El siguiente corolario nos dice que en superficies de Riemann compactas de curvatura negativa se tiene la unicidad de dicha curva geodésica.

Corolario 9.2.3. Sea X una superficie de Riemann compacta de curvatura negativa y $\mathcal{L} \in C_1(X)$ una clase de homotopía libre distinta a la clase trivial, entonces, existe una única curva geodésica cerrada de X en la clase \mathcal{L} .

Demostración:

La existencia se tiene por el Teorema de Cartan. Supongamos entonces que existen dos curvas geodésicas γ_1 y γ_2 en la clase \mathcal{L} . Luego, estas se levantan a arcos de circunferencias ortogonales a \mathbb{D} vía la función de levantamiento universal $F : \mathbb{D} \rightarrow X$, llamemoslas α_1 y α_2 . Aseguramos que existe un punto z_1 en α_1 y un punto z_2 en α_2 de modo que existe una curva geodésica β que une z_1 con z_2 y que corta ortogonalmente a α_1 y α_2 .

Para demostrar lo anterior usaremos un resultado de geometría Euclideana. Si C_i es la circunferencia que contiene a α_i , para $i = 1, 2$, consideremos la intersección de los ejes radicales entre C_1 y \mathbb{D} y C_2 y \mathbb{D} . Es fácil probar que la circunferencia de centro dicha intersección que corta ortogonalmente a \mathbb{D} , llamemosla C_3 , corta también ortogonalmente a C_i para cada i y que dichos puntos de intersección, z_1 y z_2 , pertenecen a α_1 y α_2 . Luego, β será el arco de C_3 que se encuentra en \mathbb{D} y que une a z_1 con z_2 .

Finalmente, $F(\beta)$ es una curva que une a los puntos $p = F(z_1)$ y $q = F(z_2)$ en γ_1 y γ_2 respectivamente. Como F es holomorfa se tiene que los ángulos de intersección de las curvas β con γ_1 y β con γ_2 se mantienen, es decir, queda determinado un polígono geodésico de cuatro lados en X , en el cual, la suma de sus ángulos interiores es 2π . Esto contradice el hecho que un

polígono geodésico de cuatro lados en una superficie de Riemann de curvatura negativa tiene como suma de ángulos interiores un valor menor a 2π por el lema anterior.

□

Ejemplo 9.1.3. (Un 2-toro) Consideremos el disco unitario \mathbb{D} . Construiremos un 2-toro usando algunas de las herramientas que hemos aprendido. De partida debemos considerar un polígono en \mathbb{D} , tal que sus lados sean curvas geodésicas y que la identificación de sus lados vía el cociente con algún grupo de automorfismos sea exactamente un bitoro. Como el bitoro tiene género $g = 2$, debemos considerar un octógono, supondremos además que dicho octógono es regular, centrado en el origen del disco. Consideraremos $x \in \mathbb{C}$ tal que su parte imaginaria sea cero y positiva, y forzaremos que sea uno de los vértices del octógono. Como el polígono regular debe satisfacer que la suma de los ángulos interiores es 2π , debemos encontrar x de modo que los lados que comparten dicho vértice formen un ángulo de $\pi/8$ con el eje real. Sea l el lado en el primer cuadrante y z_0 el otro extremo de l , entonces el ángulo formado por z_0 , el origen y x debe ser $\pi/4$. La existencia de dicho x se asegura debido a que la función x que determina el ángulo formado entre l y el eje real es continua (composición de arcotangente), tal que cuando x tiende a 0 el ángulo tiende a $3\pi/8$ y cuando x tiende a 1, el ángulo tiende a 0. Así, por teorema del valor intermedio, se tiene que existe dicho x tal que el ángulo formado entre l y el eje real es $\pi/8$. Haciendo los cálculos respectivos nos queda $x = 2^{-1/4}$ y $z_0 = 2^{-1/4}Cis(\pi/4)$.

Sean $z_1 = 2^{-1/4}Cis(3\pi/4)$, $z_2 = 2^{-1/4}Cis(\pi/2)$, $z_3 = z_0$ y $z_4 = x$. Debemos encontrar $f_1 \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ tal que $f_1(z_1) = z_4$ y $f_1(z_2) = z_3$, de modo que el interior del octógono tenga imagen en el exterior del octógono. Así, si $f_1(z) = \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}}$, el sistema queda

$$a = (1 + i)y, c = (2^{1/4} + i(2^{3/4} - 2^{1/4}))y$$

con y de tal forma que $|a|^2 - |c|^2 = 1$.

Es posible mostrar que f_1 manda el interior del octógono al exterior.

Para identificar al resto de los lados, consideremos $r \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ definida por $r(z) = Cis(\pi/4)z$, la rotación del disco en un ángulo de $\pi/4$. Un simple cálculo asegura que $f_2 \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ definida por $f_2(z) = (r \circ f_1 \circ r^{-1})(z)$, $f_3 \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ definida por $f_3(z) = (r^{-2} \circ f_1 \circ r^{-2})(z)$ y $f_4 \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ definida por $f_4(z) = (r \circ f_3 \circ r^{-1})(z)$ identifican los lados del octógono de modo que el cociente \mathbb{D}/G , para $G = \{f_i \in \text{Aut}(\mathbb{D}) | i = 1, 2, 3 \text{ y } 4\}$, es isomorfo a un bitoro, con $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}/G$ la función de cubrimiento universal.

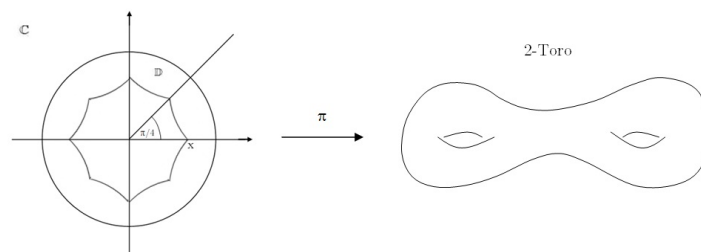


Figura 13: Construcción de un 2-Toro

Algunas observaciones adicionales podrían ser destacadas en estos momentos. Recordemos que la métrica Riemanniana se definió ante la necesidad de dotar a una superficie de Riemann de una métrica invariante bajo los automorfismos de ella; se concluyó, en particular, que la curvatura es constante en cada punto de la superficie, y además, en el caso de una superficie compacta, que el teorema de Gauss-Bonnet se satisface al integrar sobre la superficie, pero, ¿será posible dotar de una métrica a, por ejemplo un bitoro, que satisfaga Gauss-Bonnet, en la cual la curvatura sea no negativa en todo punto?. De ser posible la integral sobre la superficie de la curvatura sería no negativa, y en el caso del bitoro el término $2 - 2g$ es negativo, lo cual contradice el hecho que se satisfaga Gauss-Bonnet.

Distintos análisis de este tipo se pueden hacer, uno está en toda la libertad de dotar a una superficie de Riemann de alguna métrica que induzca la topología en ella, sin embargo, queda en manifiesto que la métrica Riemanniana proporciona herramientas que facilitan, en gran medida, el análisis de las superficies de Riemann.

10. Bibliografía

Los textos guía que permitieron realizar este trabajo fueron

- M. Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhauser, 1979.
- H.M. Farkas and I. Kra, *Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, 1991.
- O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, 1981.
- J. Gilman, I. Kra, R. Rodríguez, *Complex Analysis in the Spirit of Lipman Bers*, Springer-Verlag, 2007.
- R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, 1994.

11. Referencias

- T. Hungerford, *Algebra*, Springer, 1973.
- W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer, 1977.
- J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2000.
- I.R. Shafarevich, *Algebraic Geometry I*, Springer-Verlag, 1977.