FACULTAD DE MATEMÁTICAS

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

SEMINARIO DE SISTEMAS DINÁMICOS

"En torno a la fórmula de Pesin"

Expositor:
Felipe Riquelme

Resumen

El objetivo de este charla es estudiar relaciones entre la geometría de una variedad Riemanniana suave compacta, y las propiedades ergódicas entregadas por un difeomorfismo de la variedad en sí misma. Nuestro punto de partida será el teorema de Oseledets, el cual nos proporciona una descomposición del espacio tangente en direcciones asintoticamente contractantes y expansivas. A continuación, utilizando esta descomposición, buscaremos mesurar la entropía métrica respecto a medidas borelianas de probabilidad, invariantes por el difeomorfismo. Demostraremos y usaremos la desigualdad de Ruelle para mayorar la entropía métrica por un término que depende de los *exponentes de Lyapunov*. Será de particular interés responder a la siguiente pregunta: ¿Bajo qué condiciones existe igualdad en la desigualdad de Ruelle? Concluiremos la charla con una respuesta precisa, dando lugar entonces a la *fórmula de Pesin*.

1. Preliminares

1.1. Teorema de Oseledets

Durante todo este documento, M denotará una variedad Riemanniana compacta de clase C^∞ y $f : M \to M$ un difeomorfismo de clase C^1. Decimos que $x \in M$ es un *punto regular* de f si existen números $\lambda_1(x) > ... > \lambda_m(x)$ y subespacios vectoriales de T_xM, $E_1(x), ..., E_m(x)$, tales que

$$T_xM = E_1(x) \oplus ... \oplus E_m(x)$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|(D_xf^n)u\| = \lambda_j(x)$$

para todo $u \in E_j(x)$, no nulo, para todo $1 \leq j \leq m$. En tal caso, los números y la descomposición son únicos, por lo que llamamos a los $\lambda_j(x)$ *exponentes de Lyapunov* y a los espacios $E_j(x)$ *espacios característicos.*

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio métrico compacto y $T : X \to X$ una aplicación continua. Decimos que un conjunto medible $\Lambda \subset X$ es de medida total, si para toda medida $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$ se tiene $\mu(\Lambda) = 1$.*

Una primera aproximación para entender la dinámica del difeomorfismo, desde la perspectiva de la teoría ergódica, está dada por el siguiente teorema

Teorema 1.1.2. ***(Teorema de Oseledets)*** *El conjunto Λ de puntos regulares de f es un boreliano de medida total. Más aún, las funciones $x \mapsto \lambda_j(x)$, $x \mapsto dim(E_j(x))$, definidas sobre Λ, son medibles.*

Recordemos que una medida $\mu \in \mathcal{M}_f(M)$ se dice *ergódica* si se satisface una de las siguientes propiedades equivalentes

1) Si A es un conjunto medible, invariante por f, entonces $\mu(A) \in \{0, 1\}$.

2) Si $g : M \to \mathbb{R}$ es una función que satisface $g = g \circ f$, entonces g es constante μ-c.t.p.

Por lo que, luego de la definición de punto regular de f, las aplicaciones $x \mapsto \lambda_j(x)$ y $x \mapsto \dim(E_j(x))$ son f-invariantes, y luego constantes (casi en todas partes) para medidas ergódicas en $\mathcal{M}_f(M)$.

Para concluir esta subsección, introduciremos una función que será fundamental a lo largo de toda este documento. Definimos $\chi : M \to \mathbb{R}$ como

$$\chi(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\lambda_j(x)>0} \lambda_j(x)\dim(E_j(x)), & \text{si hay exponentes de Lyapunov positivos} \\ 0 & \text{,en otro caso} \end{cases}$$

la cual es uniformemente acotada superiormente debido a la continuidad de norma de la diferencial de f sobre M, la cual es una variedad compacta.

Proposición 1.1.3. *Sea $x \in \Lambda$ y $E^u(x) = \bigoplus_{\lambda_j(x)>0} E_j(x)$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |\det((D_xf^n)_{|E^u(x)})| = \sum_{\lambda_j(x)>0} \lambda_j(x) dim(E_j(x))$$

1.2. Entropía

Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos particiones de M, denotaremos por $\mathcal{P}(x)$ al elemento (átomo) de la partición $\mathcal{P}$ que contiene a $x \in M$ y $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ la partición generada por $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, es decir, que contiene a todas las intersecciones entre elementos de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$.

Definimos la entropía métrica de $\mathcal{P}$ respecto a la medida $\mu \in \mathcal{M}_f(M)$ como

$$H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log \mu(P)$$

y la entropía de $\mathcal{P}$ relativa a $\mathcal{Q}$ como

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) &= \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \mu(Q) \left[-\sum_{P \in \mathcal{P}} \frac{\mu(P \cap Q)}{\mu(Q)} \log \left(\frac{\mu(P \cap Q)}{\mu(Q)} \right) \right] \\ &= -\sum_{P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}} \mu(P \cap Q) \log \left(\frac{\mu(P \cap Q)}{\mu(Q)} \right) \end{aligned}$$

Bajo estas condiciones es posible probar que $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$. Decimos que $\mathcal{P}$ es más fina que $\mathcal{Q}$ si para todo elemento P de $\mathcal{P}$ existe un elemento Q de $\mathcal{Q}$ tal que $P \subset Q$. Si $\mathcal{P}$ es más fina que otra partición $\mathcal{R}$, entonces

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) \geq H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) \quad \text{y} \quad H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P}) \leq H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{R}).$$

Definimos también la entropía de f relativa a $\mathcal{P}$ como

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_\mu \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j} \mathcal{P} \right).$$

De lo anterior es posible mostrar que

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \to \infty} H_\mu \left(\mathcal{P} \middle| \bigvee_{j=1}^{n} f^{-j} \mathcal{P} \right)$$

donde la secuencia $\{H_\mu(\mathcal{P}| \bigvee_{j=1}^{n} f^{-j} \mathcal{P})\}_n$ es decreciente. Esto implica

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) \leq H_\mu(\mathcal{P}|f^{-1}\mathcal{P}).$$

Finalmente definimos la entropía métrica de f como $h_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f, \mathcal{P})$.

Un resultado que nos será útil es el siguiente. Consideremos una sucesión creciente de particiones $(\mathcal{P}_n)_{n \geq 1}$, tales que la σ-algebra generada por la unión de los elementos de las particiones $\mathcal{P}_n$ es la σ-algebra boreliana, salvo por conjuntos de medida cero (también conocida como sucesión *generatriz*). Entonces

$$h_\mu(f) = \lim_{n \to \infty} h_\mu(f, \mathcal{P}_n).$$

Otra forma de entender a la entropía métrica de una partición es la siguiente. Para una partición $\mathcal{P}$ se tiene $H_\mu(\mathcal{P}) = \int_M -\log \mu(\mathcal{P}(x)) d\mu(x)$. Si escribimos $\mathcal{P}^n$ a la particion $\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}\mathcal{P}$, entonces tenemos la fórmula

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \to \infty} \int_M -\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^n(x)) d\mu(x).$$

El teorema de Shannon-McMillan-Breiman asegura la convergencia en $\mathcal{L}^1$ de la sucesión de funciones $(-1/n \log \mu(\mathcal{P}^n(x)))_{n \in \mathbb{N}}$ si la entropia métrica de $\mathcal{P}$ es finita. Esto implica que

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \int_M -\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^n(x)) \right) d\mu(x).$$

2. Desigualdad de Ruelle

Teorema 2.0.1. *(**Ruelle**) Para toda medida $\mu \in \mathcal{M}_f(M)$ se tiene*

$$h_\mu(f) \leq \int_M \chi d\mu \tag{1}$$

La idea de la demostración consiste en trabajar sobre una sucesión generatriz de particiones adecuada, que permita medir el comportamiento de los exponentes de Lyapunov. Hay tres pasos fundamentales, los cuales buscan mayorar la entropía por términos que miden la dinámica aproximando linealmente.

Demostración: La compacidad de M permite reducirse al caso donde M es una subvariedad inmersa isométricamente en $\mathbb{R}^l$.

Afirmación 1: Existe una vecindad abierta U de M y un difeomorfismo $f_0 : U \to f_0(U) \subset U$ que extiende f y que satisface

$$(D_x f_0)(T_x M)^\perp = (T_{f(x)}M)^\perp \quad , \quad \|(D_x f_0)_{|(T_x M)^\perp}\| \leq 1/2$$

para todo $x \in M$.

En efecto, M es cerrada en $\mathbb{R}^l$ por lo que para cada $y \in \mathbb{R}^l$ existe $x = \pi(y)$ en M que verifica $d(y, x) = d(y, M)$. Esto implica que y pertenece al espacio afín $(T_x M)^\perp$ ortogonal a $T_x M$ que pasa por x.

Escribimos entonces $B_\varepsilon((T_x M)^\perp)$ como la bola de radio ε centrada en x contenida en ese espacio. Esto implica que para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $M_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^l | d(y, M) < \varepsilon\}$ es igual a

$$M_\varepsilon = \bigcup_{x \in M} B_\varepsilon((T_x M)^\perp).$$

La continuidad del radio de inyectividad de la exponencial normal sobre M, y la compacidad, permiten encontrar $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todos $x_1, x_2 \in M$ distintos, se tiene

$$B_{\varepsilon_0}((T_{x_1}M)^\perp) \cap B_{\varepsilon_0}((T_{x_2}M)^\perp) = \emptyset.$$

La contrucción de f_0 resulta natural sobre el abierto M_{ε_0}.

Consideremos ahora la partición $\mathcal{P}_n$ de $\mathbb{R}^l$, $n \geq 1$, definida por los átomos de la forma

$$(q_1/n, (q_1 + 1)/n] \times (q_2/n, (q_2 + 1)/n] \times ... \times (q_l/n, (q_l + 1)/n]$$

donde $(q_1, ..., q_l) \in \mathbb{Z}^l$.

Afirmación 2: Podemos suponer que para todo $n \geq 1$, $P \in \mathcal{P}_n$, se tiene $\mu(M \cap \partial P) = 0$.

Consideremos un índice j fijo, $x \in \mathbb{R}$ y notemos por $T_j(x)$ la intersección de M con el hiperplano definido por la ecuación $x_j = x$. Escribimos $\Sigma_j = \{x \in \mathbb{R} | \mu(T_j(x)) \neq 0\}$. Como μ es una medida de probabilidad, Σ_j es a lo más numerable. Como $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es no numerable, podemos encontrar $x = (x_1, ..., x_l)$ tal que para todo $q \in \mathbb{Q}$ y todo $j \in [1, l]$, uno tenga $\mu(T_j(x_j + q)) = 0$. Si trasladamos de modo que $(x_1, ..., x_l)$ sea el origen, entonces se tiene la afirmación buscada.

La sucesión de particiones $(\mathcal{P}_n \cap M)_{n \geq 1}$ genera entonces la tribu boreliana de M, salvo por un conjunto de medida nula. Así,

$$h_\mu(f) = \lim_{n \to \infty} h_\mu(f, \mathcal{P}_n \cap M).$$

Por otro lado, $h_\mu(f, \mathcal{P}_n \cap M) \leq H_\mu(\mathcal{P}_n \cap M | f^{-1}(\mathcal{P}_n \cap M))$, entonces la concavidad de la función $x \mapsto \log(x)$ muestra

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}_n \cap M | f^{-1}(\mathcal{P}_n \cap M)) &= \sum_{A \in \mathcal{P}_n \cap M} \mu(A) \sum_{B \in \mathcal{P}_n \cap M} \frac{\mu(B \cap f^{-1}(A))}{\mu(A)} \log\left(\frac{\mu(B \cap f^{-1}(A))}{\mu(A)}\right) \\ &\leq \sum_{A \in \mathcal{P}_n \cap M} \mu(A) \log \sharp\{B \in \mathcal{P}_n \cap M | B \cap f^{-1}(A) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Si escribimos $\nu_{f,n}(x) := \sharp\{B \in \mathcal{P}_n \cap M | B \cap f^{-1}(A) \neq \emptyset\}$ para $x \in A$, entonces

$$h_\mu(f, \mathcal{P}_n \cap M) \leq \int_M \log \nu_{f,n}(x) d\mu(x).$$

El teorema de convergencia dominada de Lebesgue muestra que para $\nu_f(x) = \limsup_{n\to\infty} \nu_{f,n}(x)$ se tiene

$$h_\mu(f) \leq \int_M \log \nu_f(x) d\mu(x).$$

Si ahora consideramos f^n prolongada por f_0^n, la desigualdad anterior permanece siendo cierta, entonces

$$h_\mu(f) = \frac{1}{n} h_\mu(f^n) \leq \int_M \frac{1}{n} \log \nu_{f^n}(x) d\mu(x).$$

Como f_0^n es un difeomorfismo sobre su imagen, entonces podemos usar la linearización de la aplicación para mostrar que, si $Q_0 = [-1,1]^l$

$$\nu_{f^n}(x) \leq \sup_y \sharp\{P \in \mathcal{P}_1 | (y + (D_x f_0^n) Q_0) \cap P \neq \emptyset\}.$$

Si considero un paralelepípedo Q que contiene a Q_0, el último término de la desigualdad anterior es mayorado por

$$\nu_{f^n}(x) \leq \sup_y \sharp\{P \in \mathcal{P}_1 | (y + (D_x f_0^n) Q) \cap P \neq \emptyset\}.$$

Afirmación 3: Si llamamos $\phi(a_1, ..., a_l)$ el número maximal de átomos de $\mathcal{P}_1$ que pueden intersectar a un paralelepípedo de lados con largo $a_1, ..., a_l$, entonces $\phi(a_1, ..., a_l) \leq C \prod_{a_i > 1} a_i$ donde C es una constante que depende solo de l.

La demostración de la afirmación anterior no es muy complicada de mostrar por lo que la asumiremos cierta. Consideremos entonces un paralelepípedo Q como antes donde los vectores $\{u_1, ..., u_l\}$ que lo definen estén o bien en un espacio característico $E_i(x)$ o bien en $(T_x M)^\perp$. Esto implica que

$$\sup_y \sharp\{P \in \mathcal{P}_1 | (y + (D_x f_0^n) Q) \cap P \neq \emptyset\} \leq C \prod_{\|(D_x f_0^n) u_i\| > 1} \|(D_x f_0^n) u_i\|$$

y por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \nu_{f^n}(x) \leq \sum_{\lambda_i(x) > 0} \lambda_i(x) \dim(E_i(x)) = \chi(x).$$

Nuevamente gracias al teorema de convergencia dominada de Lebesgue, es posible mostrar que

$$h_\mu(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} h_\mu(f^n) \leq \int_M \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \nu_{f^n}(x) d\mu(x)$$

y entonces

$$h_\mu(f) \leq \int_M \chi(x) d\mu(x).$$

■

3. Teorema de Pesin

Teorema 3.0.2. ***(Pesin)*** *Sea M una variedada Riemanniana compacta, de clase C^∞ y $f : M \to M$ un difeomorfismo de clase $C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$. Si $\mu \in \mathcal{M}_f(M)$ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue λ definida sobre M, entonces*

$$h_\mu(f) = \int_M \chi d\mu \tag{2}$$

La demostración de este teorema consta esencialmente de dos etapas. Solo daremos un resumen de la prueba, dejando los detalles al lector.

Primera Etapa: Consideremos μ f-invariante y absolutamente continua respecto a otra medida ν. Sea además $\rho : M \to (0,1)$ función tal que $\log\rho$ es integrable respecto a μ. Se define

$$S_n(f,\rho,x) = \{y \in M | \forall 0 \le j \le n, d(f^j(x), f^j(y)) \le \rho(f^j(x))\}$$

y

$$h_\nu(f,\rho,x) = \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\nu(S_n(f,\rho,x)).$$

Entonces

$$h_\mu(f) \ge \int_M h_\nu(f,\rho,x)d\mu(x).$$

Para demostrar esto, consideramos $r_n = e^{-n}$ y $U_n = \{x \in M | r_{n+1} \le \rho(x) < r_n\}$. Ya que $n\mu(U_n) = \int_{U_n} nd\mu(x) \le \int_{U_n}[-\log\rho(x)]d\mu(x)$, la integrabilidad de $\log\rho$ implica la convergencia de la serie de término general $n\mu(U_n)$.

Uno construye entonces una partición $\mathcal{P}$, utilizando la existencia de $C > 0$ tal que para todo $0 < r \le \mathrm{diam}(M)$ existe una partición $(\mathcal{P}_r)$ de M con átomos de diámetro menor o igual a r y tal que

$$\sharp\mathcal{P}_r \le C\left(\frac{1}{r}\right)^{\dim M}.$$

Los átomos de $\mathcal{P}$ son entonces aquellos de la forma $(U_n \cap P)$ para $P \in \mathcal{P}_{r_{n+1}}$. En este caso, para $x \in U_n$, $\mathrm{diam}\mathcal{P}(x) \le r_{n+1} \le \rho(x)$, y la convergencia de $\sum n\mu(U_n)$ implica, junto a la concavidad de $x \mapsto \log x$, que $\mathcal{P}$ tiene entropía finita.

Escribimos $\mathcal{P}^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}\mathcal{P}$, entonces

$$h_\mu(f) \ge h_\mu(f,\mathcal{P}) = \int_M \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log\mu(\mathcal{P}^n(x))\right)d\mu(x).$$

La continuidad absoluta de μ respecto a ν implica que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(\mathcal{P}^n(x))}{\nu(\mathcal{P}^n(x))} = \left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)(x)$$

en ν - casi todas partes. Así obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log\mu(\mathcal{P}^n(x))\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log\nu(\mathcal{P}^n(x))\right)\\ &+ \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log\frac{\mu(\mathcal{P}^n(x))}{\nu(\mathcal{P}^n(x))}\right)\end{aligned}$$

y luego

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log\mu(\mathcal{P}^n(x))\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log\nu(\mathcal{P}^n(x))\right)$$

para ν- casi todas partes.

Finalmente, como diam$\mathcal{P}(x) \leq \rho(x)$ se tiene $\mathcal{P}^n(x) \subset S_n(f,\rho,x)$, y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}(-1/n\log\nu(\mathcal{P}^n(x))) \geq h_\nu(f,\rho,x)$$

lo que implica que

$$h_\mu(f) \geq \int_M h_\nu(f,\rho,x)d\mu(x).$$

Segunda Etapa: Supongamos ahora que $f \in C^{1+\alpha}$ y que λ es la medida de Lebesgue. La demostración del teorema de Pesin se reduce a encontrar para cada $\varepsilon > 0$, un entero $N \geq 1$, $\rho : M \to (0,1)$ y un conjunto compacto $K \subset M$ tales que $\log\rho$ sea μ-integrable, $\mu(K^c) \leq \varepsilon$ y $h_\lambda(f^N,\rho,x) \geq N[\chi(x)-\varepsilon] - 4NC_1\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon$ para $x \in K$ y $C_1 \geq 0$. En efecto, en tal caso se tendría

$$\begin{aligned}
h_\mu(f) &= \frac{1}{N}h_\mu(f^N) \geq \frac{1}{N}\int_M h_\lambda(f^N,\rho,x)d\mu(x)\\
&\geq \frac{1}{N}\int_K h_\lambda(f^N,\rho,x)d\mu(x) \geq \frac{1}{N}\int_K N[\chi(x)-\varepsilon] - 4NC_1\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon d\mu(x)\\
&\geq \int_K \chi(x)d\mu(x) - 4C_1\sqrt{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{N} - \varepsilon \geq \int_M \chi(x)d\mu(x) - \varepsilon\left(\frac{4C_1}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{N} + C + 1\right)
\end{aligned}$$

donde C es una cota superior para $\chi(x)$ en μ-casi todos $x \in M$.

Claramente, si lo anterior es cierto para todo $\varepsilon > 0$, la igualdad en (2) debe ser cierta.

Las ideas principales de esta parte de la demostración son las siguientes: Primero debemos considerar $E^u(x) = \bigoplus_{\lambda_i(x)>0} E_i(x)$ y $E^0(x) = \bigoplus_{\lambda_i(x)\leq 0} E_i(x)$. Si escribimos $\Sigma_j = \{x \in M | \text{dim}E^u(x) = j\}$ y $\mu_j(A) = \mu(A\cap\Sigma_j)/\mu(\Sigma_j)$ cuando $\mu(\Sigma_j) \neq 0$, la linealidad de la entropía permite escribir $h_\mu(f) = \sum_{\mu(\Sigma_j)\neq 0} h_{\mu_j}(f_{\Sigma_j})$ y, por lo tanto, es suficiente reducirse al caso cuando $M = \Sigma_j$.

Luego, usando el hecho que estos subespacios tienen dimensión constante en μ- casi todas partes sobre M, podemos estudiar a M asimilándolo a un espacio vectorial, bajo la elección de un atlas adecuado. Esto permite hablar de gráficos y dispersión de aquellos gráficos.

El hecho que λ sea la medida de Lebesgue, permite escribir

$$\lambda(A) = B(x)\int_{E^0(x)} \lambda_{|y+E^u(x)}(A\cap(y+E^u(x)))d\lambda_{|E^0(x)}(y)$$

donde $\lambda_{|E^0(x)}$ y $\lambda_{|y+E^u(x)}$ son las medidas de Lebesgue sobre los dos espacios afines y $B(x)$ es el ángulo entre aquellos dos espacios.

Denotando por $\Lambda_n(y) = S_n(f^N,\rho,x)\cap(y+E^u(x))$ y minorizando $h_\lambda(f^N,\rho,x)$ como sigue

$$\begin{aligned}
h_\lambda(f^N,\rho,x) &= \limsup_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log\int_{E^0(x)}\lambda_{|y+E^u(x)}(\Lambda_n(y))d\lambda_{|E^0(x)}\right)\\
&\geq \limsup_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log\sup_{y\in E^0(x)}\lambda_{|y+E^u(x)}(\Lambda_n(y))\right)\\
&\geq \limsup_{n\to\infty}\inf_{y\in E^0(x)}\left(-\frac{1}{n}\log\lambda_{|y+E^u(x)}(\Lambda_n(y))\right).
\end{aligned}$$

Considerando $\varepsilon > 0$ fijo, los teoremas de Egorov y Birkhoff muestran la existencia de $K \subset M$, $N \geq 1$, $\lambda > \beta > 1$ tales que $\mu(K^c) \leq \varepsilon$, y escribiendo $g = f^N$ se tiene,

$$\forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \forall v \in E^u(x), \|(D_x g^n)v\| \geq \lambda^n \|v\|, \\ \forall v \in E^0(x), \|(D_x g^n)v\| \leq \beta^n \|v\|, \\ (1/nN) \log |\det(D_x g^n)_{|E^u(x)}| \geq \chi(x) - \varepsilon. \end{cases}$$

Escogemos ahora $c > 0$ suficientemente pequeño tal que existe $a > 0$ con la propiedad siguiente: Si $x \in K$ y $y \in M$ son tales que $d(x, y) < a$, entonces para todo subespacio $E \subset T_y M$ que es un $(E^0(x), E^u(x))$-gráfico de dispersión $\leq c$, satisface

$$\left|\log |\det(D_y g)_{|E}| - \log |\det(D_x g)_{|E^u(x)}|\right| \leq \varepsilon.$$

Si definimos entonces $\rho(x) = \text{mín}(a, \xi^{N(x)})$ donde $N(x) = \text{mín}\{n \geq 1 | g^n(x) \in K\}$ y ξ es suficientemente pequeño, se tiene la propiedad de que si $x \in K$, $g^n(x) \in K$, $y \in E^0(x)$ y $\Lambda_n(y) \neq \emptyset$, entonces $g^n(\Lambda_n(y))$ es un gráfico donde uno puede mayorar la dispersión, y entonces, es posible mayorar su volumen. Esto implica

$$C_0 \geq \int_{\Lambda_n(y)} |det(D_z g^n)_{|T_z \Lambda_n(y)}| d\lambda(z).$$

De esta forma, escribiendo $S_n = \{0 \leq j < n | g^j(x) \in K\}$, n suficientemente grande, se deduce

$$\begin{aligned}
\log |\det(D_z g^n)_{|T_z \Lambda_n(y)}| &= \sum_{j=0}^{n-1} \log |\det(D_{g^j(z)} g)_{|T_{g^j(z)} g^j(\Lambda_n(y))}| \\
&\geq \sum_{j \in S_n} \left(\log |\det(D_{g^j(z)} g)_{|T_{g^j(z)} g^j(\Lambda_n(y))}|\right) - NC_1(n - \sharp S_n) \\
&\geq \sum_{j \in S_n} \left(\log |\det(D_{g^j(x)} g)_{|E^u(g^j(x))}|\right) - n\varepsilon - NC_1(n - \sharp S_n) \\
&\geq \sum_{j=0}^{n-1} \left(\log |\det(D_{g^j(x)} g)_{|E^u(g^j(x))}|\right) - n\varepsilon - 2NC_1(n - \sharp S_n) \\
&\geq nN(\chi(x) - \varepsilon) - n\varepsilon - 2NC_1(n - \sharp S_n) \\
&\geq nN(\chi(x) - \varepsilon) - n\varepsilon - 4NnC_1\sqrt{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

donde C_1 es una constante positiva adecuada. Así, $C_0 > \lambda(\Lambda_n(y)) \exp(n(N(\chi(x) - \varepsilon - 4C\sqrt{\varepsilon}) - \varepsilon))$ y la conclusión es evidente pues en tal caso se tiene

$$-\frac{1}{n} \log \lambda(\Lambda_n(y)) \geq N[\chi(x) - \varepsilon] - 4NC_1\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon$$

y por lo tanto

$$h_\lambda(f^N, \rho, x) \geq N[\chi(x) - \varepsilon] - 4NC_1\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon.$$

Referencias

[1] Gilles, R., *Formule(s) de Pesin*, Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 8 (1989-1990), p.63-72.

[2] Ledrappier, F., *Quelques propriétés des exposants caractéristiques*, Ecole d'Ete de Probabilites de Saint-Flour XII (1985), 305-396.

[3] Mañé, R., *A proof of Pesin's formula*, Ergodic Theory Dynamical Systems, vol. 1, iss. 1, pp. 95-102, 1981.

[4] Mañé, R., *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, Springer-Verlag, 1987.

[5] Walters, P., *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag, 1982.