Teorema de Representación Conforme de Riemann

Autor :
Felipe Riquelme

Este texto está completamente basado en una parte de las notas del curso "Surfaces de Riemann" dictadas en l'Université de Rennes 1 durante el primer semestre académico del año 2013. Por ello, todo lo que aquí se explica es una adaptación personal de lo presenciado en tal curso.

1 El enunciado

El teorema de representación conforme de Riemann tiene innumerables aplicaciones en la matemática. Sin lugar a dudas es uno de los resultados clásicos más hermosos del análisis complejo.

Teorema 1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto propio simplemente conexo del plano complejo. Entonces Ω es conforme al disco unitario ; i.e. existe un biholomorfismo $f : \Omega \to \mathbb{D}$. Además esta aplicación es única si suponemos $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$ para un $z_0 \in \Omega$ fijo.*

Hay bastantes demostraciones de este resultado. La que aquí mostramos es probablemente la más clásica, pero lamentablemente carece de una intuición geométrica que permita visualizar en toda su magnitud la construcción del biholomorfismo. No obstante, no deja de ser una construcción explícita.

Dividiremos la demostración en tres partes. En la primera mostraremos la unicidad, en las restantes la existencia y entre la segunda y tercera parte enunciaremos otros resultados en los cuales nos sustentaremos. Estos resultados aparecen en practicamente todos los libros de análisis complejo.

2 Unicidad

Supongamos que existen dos aplicaciones biholomorfas $f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{D}$ que satisfacen $f_i(z_0) = 0$ y $f_i'(z_0) > 0$ para $i = 1, 2$. Entonces podemos considerar la función biholomorfa $g = f_2 \circ f_1^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Recordemos que existe una caracterización de tales funciones. Estas son necesariamente de la forma

$$e^{i\theta} \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$$

donde θ es un real y w un número complejo perteneciente al disco unitario. Suponemos entonces que g tiene esta forma. Nuestras hipótesis sobre los valores de las funciones en z_0 nos dicen que $g(0) = 0$, es decir, $w = 0$ y $g'(0) > 0$ por lo que $e^{i\theta}$ es un real positivo. Necesariamente g debe ser la identidad sobre el disco, y por lo tanto, las funciones f_1 y f_2 deben coincidir.

3 Existencia I

Consideremos la familia $\mathcal{F}$ definida por

$$\mathcal{F} = \{g : \Omega \to \overline{\mathbb{D}}, \text{holomorfa, inyectiva}, g(z_0) = 0, g'(z_0) > 0\}$$

Afirmación 3.1. *$\mathcal{F}$ es no vacío*

Demostración:

Consideremos un complejo $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ (el cual existe por hipótesis) y definamos $h(z) = (z-a)^{1/2}$ sobre Ω. Naturalmente debemos remarcar que la función h puede ser definida restringida a alguna de las ramas de la raíz cuadrada, luego la definición es razonable pues $(z-a)$ no se anula en Ω.

Esta aplicación es también holomorfa e inyectiva, y no toma valores opuestos. Es decir, cada vez que $w \in h(\Omega)$, $-w \notin h(\Omega)$.

Recordemos que las funciones holomorfas son aplicaciones abiertas, entonces existe $\rho > 0$ tal que

$$\{w \in \mathbb{C} \ : \ |w - h(z_0)| < \rho\} \subset h(\Omega),$$

entonces necesariamente

$$\{w \in \mathbb{C} \ : \ |w + h(z_0)| < \rho\} \cap h(\Omega) = \emptyset$$

pues si la intersección fuera no vacía, se tendría un elemento $w \in h(\Omega)$ tal que $\rho > |w + h(z_0)| = |-w - h(z_0)|$, por lo que $-w$ también pertenecería a $h(\Omega)$.

De lo anterior podemos concluir que para todo $z \in \Omega$, $|h(z) + h(z_0)| \geq \rho$, y por lo tanto $|2h(z_0)| \geq \rho$.

Definamos ahora $g_0 : \Omega \to \mathbb{C}$ por

$$g_0(z) = \frac{\rho}{4} \frac{|h'(z_0)|}{|h(z_0)|^2} \frac{h(z_0)}{h'(z_0)} \frac{h(z) - h(z_0)}{h(z) + h(z_0)}.$$

Así definida, g_0 es holomorfa (el término no constante no tiene polos pues encontramos una cota positiva inferior para la norma del denominador), y ciertamente es inyectiva pues es composición de funciones que son Möbius, h inyectiva y multiplicación por constante. Un simple cálculo muestra que $g_0(z_0) = 0$ y $g_0'(z_0) > 0$. Finalmente notamos que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{h(z) - h(z_0)}{h(z) + h(z_0)} \right| &= |h(z_0)| \cdot \left| \frac{1}{h(z_0)} - \frac{2}{h(z) + h(z_0)} \right| \\
&\leq |h(z_0)| \left(\frac{2}{\rho} + \frac{2}{\rho} \right) \\
&\leq \frac{4|h(z_0)|}{\rho}
\end{aligned}$$

y por lo tanto, $|g_0(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Omega$. Esto implica que $g_0 \in \mathcal{F}$, por lo que se concluye la prueba de la afirmación.

■

4 Algunos Resultados

Ahora que estamos trabajando con una familia de funciones holomorfas definidas en Ω, nos gustaría encontrar algún elemento de ella que sea precisamente la aplicación biholomorfa que estamos buscando. Ella estará definida como el límite uniforme de cierta sucesión de funciones de la familia.

Definición 4.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $\mathcal{F}$ una familia de funciones definidas en U. La familia se dice normal si para toda sucesión $(g_n)_n$ de funciones en la familia, es posible extraer una subsucesión que converge uniformemente sobre todo compacto de U.*

Nosotros contamos con una familia, pero no conocemos a priori si tal familia es normal. Un criterio que nos servirá es el siguiente, el cual puede encontrarse en [**1**]

Teorema 4.2. *(Montel) Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas definidas en U. Si $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal.*

Otro teorema que utilizaremos, bastante conocido por cierto, es el siguiente

Teorema 4.3. *Si sucesión de funciones holomorfas definidas en un abierto conexo U converge uniformemente sobre todo compacto hacia una función f, entonces f es holomorfa y la sucesión formada por las derivadas satisface la misma propiedad.*

Finalmente enunciamos un resultado que se debe a Schwarz

Teorema 4.4. *(Schwartz) Sea U un abierto conexo en $\mathbb{C}$ y $(f_n)_n$, $f_n : U \to \mathbb{C}$, una sucesión de funciones holomorfas tales que ninguna se anula en U. Si f_n converge a f sobre todo compacto, entonces o bien f es identicamente 0 en U, o bien f no se anula en U.*

5 Existencia II

Sea

$$S = \sup_{g \in \mathcal{F}} g'(z_0).$$

Entonces $0 < S \leq +\infty$. Escogemos una sucesión de funciones en $\mathcal{F}$, $(g_n)_n$, tales que $g_n'(z_0)$ converge a S. Por construcción de nuestra familia ella es uniformemente acotada, luego el teorema de Montel asegura la existencia de una subsucesión $(g_{n_k})_k$ de $(g_n)_n$, que converge a una función holomorfa f, de manera uniforme sobre todo compacto. Además es claro que $f'(z_0) = S$ y por lo tanto $S < +\infty$.

Afirmación 5.1. *f es el biholomorfismo buscado.*

Demostración:

De partida $f(z_0) = 0$, f es holomorfa y $f'(z_0) = S > 0$. Para ver la inyectividad, consideramos un punto $z_1 \in \Omega$, $z_1 \neq z_0$, y definimos para $z \in \Omega \backslash \{z_1\}$, $\tilde{f}(z) = f(z) - f(z_1)$ y $\tilde{g}_{n_k}(z) = g_{n_k}(z) - g_{n_k}(z_1)$. Entonces, dado que g_{n_k} converge a $\tilde{f}$ sobre todo compacto de $\Omega \setminus \{z_1\}$, el teorema de Schwartz nos dice que $\tilde{f}$ es o bien constante en su dominio, o bien no se anula en su dominio. Pero como $\tilde{f}'(z_0) = S > 0$, $\tilde{f}$ no puede ser constante y luego no se anula en su dominio. Esto implica que f es inyectiva en Ω.

Probablemente la parte mas delicada es la sobreyectividad. Para mostrarla supondremos que f no es sobreyectiva y concluiremos que existe una función en la familia $\mathcal{F}$

con derivada en z_0 mayor estricta que S, lo que sería una contradicción por construcción.

Supongamos entonces que f no es sobreyectiva. Entonces existe $\zeta \in \mathbb{D}$ tal que $f(z) \neq \zeta$ para todo $z \in \Omega$. Sea F la función dada por

$$F(z) = \sqrt{\frac{f(z) - \zeta}{1 - \overline{\zeta} f(z)}}.$$

Como antes, el hecho que $f(z)$ no alcance el valor ζ implica que F está bien definida en Ω para alguna rama de la raíz cuadrada, y por tanto F es holomorfa al ser composición de funciones holomorfas. Como antes es claro que F es inyectiva, es composición de funciones inyectivas. $|F(z)| \leq 1$, en efecto el término dentro de la raíz tiene justamente la estructura de un automorfismo del disco. Finalmente definimos la función $G : \Omega \to \mathbb{C}$ como

$$G(z) = \frac{|F'(z_0)|}{F'(z_0)} \frac{F(z) - F(z_0)}{1 - \overline{F(z_0)} F(z)}.$$

Esta función por los mismos argumentos anteriores es inyectiva y holomorfa. Satisface claramente que $G(z_0) = 0$ y $|G(z)| \leq 1$. Finalmente calculamos $G'(z_0)$...

$$G'(z) = \frac{|F'(z_0)|}{F'(z_0)} \frac{F'(z)(1 - \overline{F(z_0)} F(z)) + \overline{F(z_0)} F'(z)(F(z) - F(z_0))}{(1 - \overline{F(z_0)} F(z))^2}$$

y luego

$$G'(z_0) = \frac{|F'(z_0)|}{F'(z_0)} \frac{F'(z_0)}{1 - \overline{F(z_0)} F(z)} = \frac{F'(z_0)}{1 - |\zeta|}$$

Por otro lado, mediante una simple derivación de F, y luego al evaluar en Z_0, tenemos

$$F'(z_0) = \frac{S(1 - |\zeta|^2)}{2(-\zeta)^{1/2}}$$

es decir, $G'(z_0) = S\dfrac{1 + |\zeta|}{2|\zeta|^{1/2}}$. Finalmente, ya que $|\zeta| < 1$, $1 + |\zeta| > 2|\zeta|^{1/2}$, lo que implica $G'(z_0) > S$.

■

Observación 5.2. *Por simplicidad consideramos en la familia a las funciones cuyo recorrido se encuentra en la clausura del disco unitario. Una vez que la función es holomorfa, es una aplicación abierta, y por tanto su recorrido debe ser un subconjunto abierto de* $\mathbb{D}$*.*

6 Referencias

[1] GAMELIN, T.W., *Complex Analysis*, Undergraduate texts in mathematics, Springer-Verlag, 2001.